

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO,
CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
CAMPUS BARREIRAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

HEBERT NUNES DE BRITO

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA
MATEMÁTICA FINANCEIRA

BARREIRAS-BA
2025

HEBERT NUNES DE BRITO

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia da Bahia, IFBA Campus Barreiras,
como requisito parcial para a conclusão do Curso da
Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Felipe Moscozo Araújo da
Cruz

Coorientadora: Prof. Ma. Silvana Santos Amorim
- IFBA

BARREIRAS-BA
2025

B862aa BRITO, HEBERT NUNES DE

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA MATEMÁTICA
FINANCEIRA / HEBERT NUNES DE BRITO. - Brasília: Escola
Superior do Ministério Público da União, 2025.

37f.

Trabalho de conclusão de curso (LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA) - Escola Superior do Ministério Público da
União: Brasília, 2025.

Orientador(a): Me. FELIPE MOSCOZO ARAÚJO DA CRUZ
Coorientador(a): Ma. SILVANA SANTOS AMORIM

1. APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA MATEMÁTICA
FINANCEIRA. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente, com
os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

HEBERT NUNES DE BRITO

**APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
NA MATEMÁTICA FINANCEIRA**

Trabalho apresentado e aprovado em 8 de setembro de 2025.

Comissão Examinadora

**Prof. Me. Felipe Moscozo Araújo da
Cruz - IFBA
(Orientador)**

**Prof. Ma. Silvana Santos Amorim
- IFBA
(Coorientadora)**

**Prof. Me. Sostenes Souza de Oliveira -
IFBA**

**Prof. Me. Anderson Oliveira de
Almeida - IFBA**

Dedico este trabalho ao meu pai, que sempre me apoiou durante essa jornada.

Agradecimentos

- Gostaria de agradecer ao orientador, professor Felipe Cruz, e à coorientadora, professora Silvana Amorim, pelo suporte, orientação e conhecimento compartilhado durante toda essa jornada. Também à professora Neiva e ao professor Flávio, e às demais pessoas da instituição que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho. Sem o apoio de todos, este trabalho não seria possível.
- Aos colegas da turma de Matemática, agradeço pela colaboração e amizade durante todo o processo.
- À minha família e aos membros presentes ou ausentes que apoiaram e incentivaram durante toda a jornada, meu agradecimento especial pelo suporte.

*“A matemática é a rainha das ciências.
Gauss.”*

Resumo

Este trabalho consiste numa revisão de literatura que tem como objetivo apresentar aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias em Matemática Financeira. Esta revisão considera o período específico dos últimos sete anos. Foram analisados artigos científicos publicados em base de dados como Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e o Google Acadêmico, utilizando as palavras-chave (aplicações, EDO, Matemática Financeira) ou a frase (aplicações das EDOS na Matemática Financeira). Dentre as aplicações encontradas, presentes nos materiais, destacam-se a Capitalização de juros com Depósitos Únicos e com Depósitos Contínuos, Caderneta de Poupança e Previdência Privada. Os resultados indicam que estes achados são os que estão mais presentes no mercado financeiro. Devido à especificidade do período investigado, localizou-se pouco material referente ao assunto.

Palavras-chave: Matemática Financeira. EDO. Capitalização.

APPLICATIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN FINANCIAL MATHEMATICS

Abstract

This study is a literature review aimed at presenting the applications of Ordinary Differential Equations (ODEs) in Financial Mathematics. This review is specifically focused on the literature of the past seven years. The analysis included scientific articles published in databases such as the CAPES Catalog of Theses and Dissertations, the Brazilian Digital Library of Theses and Dissertations, and Google Scholar, using the keywords 'applications,' 'ODE,' 'Financial Mathematics,' or the phrase 'applications of ODEs in Financial Mathematics.' Among the applications found in the selected materials, the most prominent are the capitalization of interest with single and continuous deposits, savings accounts, and private pension plans. The results indicate that these are the most prevalent applications within the financial market literature. Due to the specific period investigated, a limited body of relevant material on the subject was located.

Keywords: Financial Mathematics. ODE. Capitalization.

Sumário

1 – Introdução	1
2 – Metodologia do Trabalho	3
3 – Matemática Financeira	5
4 – Equações Diferenciais	9
5 – Concepções dos Autores sobre as Aplicações das EDOs na Matemática	12
5.1 Análise 1: Silva (2019)	12
5.2 Análise 2: Barbosa (2022)	21
5.3 Análise 3: Freitas (2019)	23
5.4 Análise 4: Meneses (2022)	24
6 – Conclusão	25
Referências	26

1 Introdução

Esta pesquisa consiste em um levantamento bibliográfico de trabalhos acadêmicos que utilizam Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) para a modelagem de problemas do cotidiano financeiro.

As Equações Diferenciais constituem um ramo da Matemática que tem proximidade e interações com outras ciências. Sua origem facilmente se confunde com a do Cálculo Diferencial e Integral e da Mecânica Clássica, pois uma grande motivação inicial para o estudo das Equações Diferenciais veio da Mecânica, conforme apontado por Bassanezi (1988). Podem-se citar alguns exemplos como o movimento dos planetas, a catenária e o estudo da oscilação do pêndulo, conforme o mesmo autor.

Esses conteúdos foram estudados por J. Kepler (1571-1630), Leonardo da Vinci (1452-1519), G. Galileo (1564-1642) e C. Huygens (1629-1695). No final do século XVII, com o aparecimento do Cálculo como obra de Isaac Newton (1642-1727) e G.W. Leibnitz (1646-1716), vários problemas mecânicos puderam ser modelados matematicamente na forma de Equações Diferenciais e também aqueles relacionados à Química.

Ao modelar um fenômeno ou experimento, obtemos equações que envolvem variações de quantidades presentes e consideradas essenciais. E ainda as leis que regem tal fenômeno são traduzidas por equações de variações. Com isso, quando essas variações são instantâneas, o fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são denominadas Equações Diferenciais, conforme elencado por Bassanezi (1988).

Além disso, o fato de que as Equações Diferenciais permeiam as demais ciências foi o estopim para a ideia da realização dessa pesquisa, visto que foi possível visualizar as aplicações das Equações Diferenciais para a resolução de problemas relacionados à Matemática Financeira. Compreender que as Equações tratavam dessas variações dentro do contexto monetário despertou-me o interesse de trabalhar com a temática nesta monografia.

Sendo assim, o objetivo deste trabalho consistiu em mapear o cenário da modelagem das Equações Diferenciais no contexto da Matemática Financeira, a partir de uma revisão bibliográfica.

A ideia para a construção desta pesquisa veio durante a disciplina de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, em que se solicitou como instrumento avaliativo a construção de um pequeno artigo contendo aplicações das Equações Diferenciais. Durante o levantamento de dados, foi notado que era possível aplicar as Equações Diferenciais envolvendo questões da Matemática Financeira.

A metodologia adotada para esse trabalho é uma revisão de literatura, através da pesquisa bibliográfica, que se destaca por: "Existem porém pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta."(Fonseca, (2002), p. 32).

O trabalho está dividido em seis capítulos, dos quais o Capítulo 1 tem caráter introdutório, elencando as motivações da construção da monografia e um breve resumo sobre os capítulos. O Capítulo 2 aborda a metodologia aplicada para a elaboração do trabalho e os locais selecionados como base para a Revisão de Literatura. O Capítulo 3 apresenta um breve histórico acerca da Matemática Financeira e suas fórmulas. No Capítulo 4, são apresentados tópicos sobre a parte histórica das Equações Diferenciais e suas definições. O Capítulo 5 aborda o Levantamento Bibliográfico, citando os autores selecionados para a elaboração da monografia. E por fim, o Capítulo 6 que apresenta a conclusão do trabalho.

Durante a coleta de material base para a construção do trabalho, foi possível observar que há muitos trabalhos voltados para as áreas da Física e Química, e uma pequena quantidade que envolva de forma específica apenas as aplicações das Equações Diferenciais no campo da Matemática Financeira. Ainda no processo de coleta de material, o que já foi publicado possuía apenas um pequeno fragmento das aplicações das Equações Diferenciais no campo da Matemática Financeira. Dessa maneira nota-se que é de suma importância realizar um trabalho que liste os diversos tipos de aplicações de EDOs e o estudo mais detalhado dessas equações.

Com o propósito de atingir os objetivos delineados e mapear de maneira sistemática o cenário de trabalhos que aplicam as Equações Diferenciais Ordinárias no âmbito da Matemática Financeira, foi fundamental estabelecer um método de pesquisa claro e rigoroso. A definição de critérios específicos para a busca e seleção de materiais é essencial para garantir a relevância e a atualidade do levantamento bibliográfico. Sendo assim, o capítulo a seguir detalhará os procedimentos metodológicos adotados, incluindo as bases de dados consultadas, as palavras-chave utilizadas e o período temporal delimitado para a coleta das publicações que constituem o corpo de análise deste estudo.

2 Metodologia do Trabalho

A metodologia utilizada neste trabalho é a revisão de literatura de um tipo predominantemente narrativo. De acordo com Sampaio (2007), a revisão de literatura narrativa é basicamente uma análise da literatura publicada em livros, artigos de revista impressas e/ou eletrônicas que possibilita uma interpretação e análise crítica pessoal do autor.

Neste capítulo, mostro como foi realizada a coleta dos dados para a revisão de literatura, de forma a elencar os passos da filtragem e listagem dos materiais selecionados, sobre o uso de Equações Diferenciais Ordinárias aplicadas na Matemática Financeira.

O processo de busca se inicia com pesquisas nos sites de instituições de ensino e de pesquisa na área da Matemática, disponibilizados em plataformas digitais. Dentre as plataformas, é possível elencar o Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e o Google Acadêmico. O foco deste trabalho é a utilização de EDOs na modelação de situações cotidianas da Matemática Financeira, voltadas às aplicações financeiras. Com base nesses filtros, foram localizados e selecionados os materiais que abordam o tópico desejado.

Com relação às estratégias utilizadas para a realização da busca, são as seguintes, de acordo com Sampaio (2007):

- a) Tipo de trabalho: monografias que possuam como palavras-chave (aplicações, EDO, Matemática Financeira) ou frases que contenham (aplicações das EDOS na Matemática Financeira), que seja no assunto dos materiais coletados.
- b) Período determinado: 2019-2024, objetivando os estudos mais recentes acerca do tema.
- c) Operador lógico: "E", para que as buscas dos materiais possam abranger as palavras-chave solicitadas.

Os materiais encontrados são expostos no Capítulo 5, no qual, alguns resultados matemáticos são detalhados com a finalidade de uma melhor compreensão. Na tabela abaixo, estão os materiais selecionados para a construção do trabalho.

Material		
Autor (Ano)	Título	Instituição
Freitas (2019)	Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem: aplicações na Economia	Universidade Federal do Rio Grande
Silva (2019)	Matemática Financeira: Do Estudo Algébrico à Aplicações com Equações Diferenciais Ordinárias	Universidade Federal do ABC
Barbosa (2022)	Capitalização a Juros Compostos através da Matemática Financeira e da E.D.O de 1º Ordem	Universidade Federal do Pará
Meneses (2022)	Equações Diferenciais e Algumas Aplicações	Universidade Federal do Ceará

Tabela 1. Fonte: Autoria Própria.

3 Matemática Financeira

De acordo com Puccini (2011) e Neto (2009), a Matemática Financeira é um corpo de conhecimento que estuda a mudança de valor do dinheiro com o decurso de tempo. Para isso, esta possui modelos que permitem avaliar e comparar o valor do dinheiro em diversos pontos do tempo. Conforme Schneider (2010), a Matemática Financeira possui ligação ao conceito e significado de comércio. Desde as civilizações primitivas, com a comunicação dos grupos humanos, começaram as trocas de mercadorias a partir das quantidades excedentes que cada um possuía, sem se preocupar com o valor delas. Após esse período, surgiu a necessidade de criar um sistema mais estável de avaliação de equivalência entre as mercadorias, e surgiram as unidades chamadas de moeda-mercadoria ou padrões fixos. Como exemplo, temos o sal no Império Romano (séc. I ao séc. V), de onde surgiu o termo salário. Conforme passava o tempo, os povos começaram a notar a necessidade de usar moedas como forma de realizar trocas comerciais.

Segundo Gonçalves (2005), na antiga Roma os cambistas exigiam de 50% a 100% de juro, e na Idade Média entre 100% e 200% de juro. Além disso, os cambistas exerciam a sua profissão sentados num banco de madeira, em algum lugar do mercado local, fazendo o câmbio de dinheiro e dando origem as palavras "banqueiro" e "banco".

Por volta do século XVII, é possível citar uma importante atividade, a de mercador, que utilizava o ouro e prata para relações comerciais. Após um período, os comerciantes começaram a acumular grandes quantidades de moedas estrangeiras, e que seria preciso realizar uma atividade de troca ou câmbio de dinheiro, dando origem aos cambistas. Isso levou interesse de ganhar algum lucro em cima da quantia guardada, surgindo assim a cobrança de uma soma adicional, que é conhecido como o juro. Assim, a partir de então que conseguimos observar o surgimento das ideias da Matemática Financeira. Na Matemática Financeira temos algumas definições primárias como: juros (j), montante (m), e capital (c) e outros discutidos a seguir.

De acordo com Puccini (2011), o capital é o valor inicial de uma operação financeira expresso em unidades monetárias. Esse valor pode ser dinheiro em espécie; valor de um título de dívida no início de um processo financeiro; e valor de ativos físicos como prédios, máquinas, veículos e outros no início de um processo financeiro. Além disso, o capital pode ser visto como um ativo que pode ser cedido por uma agente econômico, como um banco, a outro mediante condições estabelecidas previamente. Um determinado capital, quando aplicado a uma taxa periódica de juro por determinado tempo, produz um valor acumulado denominado de montante, ou seja, o montante é igual ao capital mais o valor acumulado dos juros, isto é:

$$m = c + j.$$

Conforme Neto (2009), "Receber uma quantia hoje ou no futuro não são evidentemente a mesma coisa". Adiar uma entrada de caixa por um tempo envolve uma obrigação, que deve ser paga mediante uma recompensa, definida pelos juros. A taxa de juro é o coeficiente que determina o valor do juro, ou seja o capital vezes a taxa de juros resulta no valor dos juros. Essa taxa se refere sempre a uma unidade de tempo (mês, semestre, ano *etc*). Assim o valor dos juros é calculado a partir da seguinte expressão:

$$j = c \cdot i \cdot n,$$

onde j representa o valor do juro simples expresso em unidades monetárias, c o capital como valor representativo de determinado momento, i a taxa de juros, expressa em sua forma unitária e n o prazo.

Esta fórmula é básica tanto para o cálculo dos juros simples como dos outros valores financeiros mediante dedução algébrica:

$$c = \frac{j}{i \cdot n} \Rightarrow i = \frac{j}{c \cdot n} \Rightarrow n = \frac{j}{c \cdot i}$$

De acordo com Neto (2009), os juros simples têm aplicações práticas limitadas, pois são raras as operações financeiras e comerciais que formam seus montantes usando esse regime. Isso se deve ao fato de que essas operações de juros simples são praticadas no âmbito do curto prazo. Ao invés disso, são usados os juros compostos, que é adotado por todo o mercado financeiro e de capitais.

O regime de juros compostos leva em conta que os juros formados em cada período são acrescentados ao capital formando o montante do período, a partir desse montante passará a render juros no período seguinte formando um novo montante, e assim sucessivamente. Os juros compostos são capitalizados, isto é, produzindo juros sobre juros periodicamente, conforme o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} m_1 &= c + c \cdot i = c(1 + i) \\ m_2 &= m_1 + m_1 \cdot i = m_1(1 + i) = c(1 + i)(1 + i) = c(1 + i)^2 \\ m_3 &= m_2 + m_2 \cdot i = c(1 + i)^2(1 + i) = c(1 + i)^3 \end{aligned}$$

Com m_1 , o primeiro montante, o m_2 o montante anterior após a capitalização, e m_3 representando o montante anterior a partir das aplicações do juros compostos.

Generalizando temos:

$$m_n = c(1 + i)^n$$

Ou seja:

$$m = c(1 + i)^n \Rightarrow c = \frac{m}{(1 + i)^n} \quad (1)$$

Para encontrarmos o i temos:

$$m = c(1 + i)^n \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{m}{c}} = \sqrt[n]{(1 + i)^n} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{m}{c}} - 1 = i \Rightarrow i = \sqrt[n]{\frac{m}{c}} - 1$$

Para encontrarmos o n temos:

$$m = c(1 + i)^n \Rightarrow \log(1 + i)^n = \log\left(\frac{m}{c}\right) \Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{m}{c}\right)}{\log(1 + i)}$$

De acordo com Puccini (2011), para determinar a taxa mensal, quando temos a taxa anual é dada por:

$$r_m = \sqrt[12]{(1 + r_a)} - 1 = (1 + r_a)^{\frac{1}{12}} - 1 \quad (2)$$

Além disso, Puccini (2011), destaca a taxa equivalente. Se a taxa de juro relativamente a um determinado período de tempo é igual a i , a taxa de juro relativamente a n período de tempo I tal que:

$$1 + I = (1 + i)^n$$

Neto (2009) cita que os critérios de capitalização de juros demonstram como os juros são formados e sucessivamente incorporados ao capital no decorrer do tempo. O regime de capitalização simples comporta-se como uma progressão aritmética, crescendo os juros de forma linear conforme o tempo passa. Por outro lado, o regime de capitalização composta incorpora ao capital os juros referentes a cada período, mas também os juros sobre os juros acumulados até o momento anterior. Com um comportamento que se assemelha a uma progressão geométrica, sendo que os juros incidem sempre sobre o saldo no início do período correspondente.

O processo de capitalizar é a incorporação dos juros ao capital aplicado. Um exemplo seria um empréstimo de R\$ 1.000,00 pelo prazo de 5 anos, pagando-se juros simples à razão de 10% ao ano, totalizando R\$ 1.500,00 ao final do quinto ano. E pelo regime da capitalização composta, seguindo o exemplo anterior o saldo final será de R\$ 1.610,51. Por outro lado, o desconto é uma operação que é inversa da capitalização. De acordo com Neto (2009), as operações de desconto podem ser feitas sob o regime de juros simples ou juros compostos.

Conforme é possível observar, dentro do contexto da Matemática Financeira, temos várias formas de pensar em aplicações envolvendo os juros simples e os juros compostos,

o que nos leva a questionar se é possível pensar nessas aplicações no âmbito das Equações Diferenciais. Para Zill (2016), as Equações Diferenciais permitem através de modelos matemáticos explicar fenômenos, experimentos ou teorias dentro do mundo real. Abaixo no próximo capítulo, iremos explicar acerca das Equações Diferenciais, com um breve histórico e as suas definições.

4 Equações Diferenciais

Os estudos das Equações Diferenciais começaram com Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), durante o século XVII. Porém, Newton atuou pouco na área das Equações Diferenciais propriamente ditas, o desenvolvimento maior foi por conta do Cálculo Diferencial e Integral e da elucidação dos princípios básicos da Mecânica. O Cálculo Diferencial e Integral foi base essencial para a aplicação das Equações Diferenciais no século XVIII, em especial por Euler.

De acordo Boyce (2020), além de Newton, Leibniz também foi importante para a área das Equações Diferenciais, já que ele foi responsável pela notação $\frac{dy}{dx}$ para a derivada e o sinal de integral. Também é importante citar os irmãos Bernoulli, Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748), eles resolveram muitos problemas em Mecânica, formulando-os como Equações Diferenciais.

Conforme Bassanezi (1988), é frequente ao modelar um fenômeno ou experimento, que obtenhamos as equações que envolvam as variações das quantidades presentes e consideradas essenciais. Assim, as leis que regem tal fenômeno são mostradas como equações de variações. Se as variações são instantâneas, o fenômeno se desenvolve continuamente, e as equações são denominadas de Equações Diferenciais. A seguir temos a definição de Equação Diferencial.

De acordo com Yartey (2017), uma equação que estabelece uma relação entre a variável independente x , a função incógnita $y = f(x)$ e suas derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$ se chama de Equação Diferencial. Pode ser escrita na forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Sendo o y , a função da variável x ; y' é a derivada de y em relação a x , e F é a expressão que envolve os termos x, y, y', \dots, y^n .

De acordo com Zill (2016), toda função ϕ , definida em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas contínuas em I , que quando substituídas em uma Equação Diferencial Ordinária de ordem n reduzem a equação a uma identidade, chama-se uma solução da Equação Diferencial no intervalo I .

Ou seja, uma solução de uma Equação Diferencial Ordinária de ordem n é uma função ϕ que tem pelo menos n derivadas e para a qual:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^n(x)) = 0,$$

para todo x em I . Dessa forma, dizemos que ϕ satisfaz a equação diferencial em I .

Como o método de separação de variáveis, temos que ao analisar a função de duas variáveis $y' = F(x, y)$, como caso inicial iremos considerar que a variável x não aparece, ou seja,

$$F(x, y) = ay + b \quad (3)$$

onde a e b são constantes dadas. Substituindo $F(x, y) = ay + b$ em $y' = F(x, y)$ temos:

$$y' = ay + b \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ay + b$$

Considerando $a \neq 0$ e $y \neq -\frac{b}{a}$, para garantir a condição de existência da Equação temos:

$$\frac{dy}{dx} = a(y + \frac{b}{a}) \Rightarrow \frac{1}{(y+\frac{b}{a})} dy = a dx$$

Integrando em ambos os lados, temos:

$$\ln|y + \frac{b}{a}| = ax + C,$$

sendo C a constante de integração. E então temos que $y + \frac{b}{a} = e^{ax}c$, ou ainda, $y = -\frac{b}{a} + ce^{ax}$ é uma solução da equação (3).

Em seguida, iremos analisar equações em que apareçam funções no lugar de ae e b , ou seja,

$$F(x, y) = g(x) - h(x)y$$

onde g e h são funções dependentes da variável x , de modo que obtemos

$$\frac{dy}{dx} + h(x)y = g(x), \quad (4)$$

que representa a forma geral das Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem. O método de resolução aqui descrito será o do Fator Integrante. Pois o fator integrante depende da função $h(x)$ para ser definido e a solução da equação depende de $g(x)$. Conseqüentemente, depende também das condições de integração destas funções $h(x)$ e $g(x)$. Assim utiliza-se uma função μ de modo que:

$$\mu(x) \cdot h(x) = (\mu(x))'$$

Realizando a multiplicação da EDO pelo fator integrante, e pela regra da produto temos:

$$\mu(x)y' + \mu(x)'y = \mu(x)g(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\mu(x) \cdot y) = \mu(x)g(x)$$

$$\mu(x) \cdot y = \int \mu(x)g(x)dx$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)g(x)dx \quad (5)$$

Iremos chamar μ de Fator Integrante. Para encontrarmos o Fator Integrante, usaremos a Equação $\mu(x) \cdot h(x) = (\mu(x))'$, onde o h é conhecida, assim,

$$\frac{(\mu(x))'}{\mu(x)} = h(x)$$

Realizando a integração em ambos os membros:

$$\ln \mu(x) = \int h(x)dx + C$$

Logo,

$$\mu(x) = k \cdot e^{\int h(x)dx} \quad (6)$$

onde $k = e^C$. Com esse método é possível encontrar a solução de uma Equação Diferencial de 1° ordem.

As constantes de integração direcionam as soluções encontradas para um família de funções. A seguir temos a definição do Problema do Valor Inicial, onde a solução encontrada será somente uma função definida sobre as condições do problema. Assim, sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Um Problema do Valor Inicial, PVI, é uma Equação Diferencial,

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad (7)$$

sujeita a uma condição inicial, dada por uma igualdade da forma:

$$y(x_0) = y_0, \quad (8)$$

onde $x_0 \in I$. A partir dessa condição é encontrada o valor da constante de integração da função solução da Equação Diferencial (7).

5 Concepções dos Autores sobre as Aplicações das EDOs na Matemática

Com base nos capítulos anteriores que forneceram o embasamento teórico sobre Matemática Financeira e Equações Diferenciais, este capítulo apresenta os resultados do levantamento bibliográfico. Serão detalhadas as concepções e modelos propostos por autores selecionados que aplicam Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), para resolver problemas no campo da Matemática Financeira. A análise se concentrará nos trabalhos de pesquisadores como Silva (2019), Barbosa (2022) e Freitas (2019), explorando aplicações específicas como a capitalização de juros com depósitos únicos e contínuos, a caderneta de poupança e a previdência privada.

5.1 Análise 1: Silva (2019)

O primeiro material selecionado para o levantamento bibliográfico consiste em uma dissertação de mestrado da Universidade Federal do ABC, do autor Silva (2019), com o tema "Matemática Financeira: do Estudo Algébrico à Aplicações com Equações Diferenciais Ordinárias". Nesse material, o autor busca traçar um esboço da Teoria de Funções, Progressões, Séries Uniformes, e Equações Diferenciais Ordinárias e a Matemática Financeira Elementar.

A estrutura da dissertação foi dividida em cinco capítulos, sendo que o primeiro capítulo faz um breve resumo sobre o conteúdo prévio para a Matemática Financeira. O segundo capítulo aborda os tópicos referentes à Matemática Financeira. O terceiro capítulo possui os Sistemas de Amortização de Empréstimos e Financiamentos. O quarto capítulo aborda sobre as Equações Diferenciais e as Aplicações das EDO na Matemática Financeira. O quinto capítulo possui atividades voltadas para o Ensino Médio e utiliza o software Geogebra e o Excel.

Na abordagem da EDO aplicada a Matemática Financeira, por Silva (2019), os juros podem ser modelados a partir de dois casos. Primeiro caso: ao fazer uma aplicação de uma quantia s_0 em um banco em que a taxa de variação do investimento $\frac{ds}{dt}$ é proporcional ao saldo em cada instante $s(t)$, ou seja, existe um fator de proporcionalidade $r \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{ds}{dt} = rs$, e considerando que a aplicação no instante $t = 0$ é s_0 , temos $s(0) = s_0$. Assim, para encontrar $s(t)$ resolve-se o Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = rs \\ s(0) = s_0 \end{cases} \quad (9)$$

Reescrevendo a EDO do (9) como:

$$\frac{ds}{dt} - rs = 0, \quad (10)$$

onde a mesma é uma EDO de 1° ordem, e é possível resolvê-la utilizando o Método do Fator Integrante, visto no capítulo 3. Sendo o Fator Integrante $\mu(t) = e^{\int h(x)dt}$, com $h(x) = -r$. Temos: $\mu(t) = e^{\int h(x)dt} \Rightarrow e^{\int -rdt} \Rightarrow e^{-rt+C}$, com $C = 0$, temos que o Fator Integrante $\mu(t) = e^{-rt}$. Agora, iremos substituir o Fator Integrante em 5. Ao fazer a multiplicação da equação (10) por $\mu(t) = e^{-rt}$, temos:

$$e^{-rt} \frac{ds}{dt} - e^{-rt} rs = 0.$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-rt}s) = 0.$$

Realizando a integração em ambos os membros em relação a t temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt}(e^{-rt}s(t))dt &= \int 0dt \\ e^{-rt}s(t) &= C \\ s(t) &= Ce^{rt}, \end{aligned}$$

que é a solução geral da EDO (9). Como $s(0) = s_0$ temos:

$$s_0 = Ce^{r \cdot 0} \Rightarrow s_0 = C.$$

Logo, a solução do PVI (9) é dada por:

$$s(t) = s_0 e^{rt}. \quad (11)$$

Conforme Silva (2019), usando o Sistema (9), é possível encontrar o saldo em função do tempo a partir de uma aplicação inicial s_0 . Para alinhar melhor os resultados obtidos na Equação 11, faz-se necessário ajustar o fator de proporcionalidade r e a taxa de juros i da fórmula dos juros compostos, com $n \in \mathbb{N}$ e $r, i \in \mathbb{R}$. Reescrevendo a fórmula de juros composto descrita anteriormente na Equação 1, com $m = s(n)$ e $s_0 = c$, temos:

$$s(n) = s_0(1+i)^n \quad (12)$$

Realizando a substituição de t por n na solução do Problema do Valor Inicial obtido em (11) e usando a Equação (12) temos:

$$s_0 e^{rn} = s_0(1+i)^n \Rightarrow e^{rn} = (1+i)^n \Rightarrow e^{\frac{rn}{n}} = (1+i)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow e^r = (1+i)$$

Agora, aplicando o logaritmo natural em ambos os membros:

$$\ln(e^r) = \ln(1 + i) \Rightarrow r = \ln(1 + i) \quad (13)$$

Dessa forma, a Equação (11) é mais precisa desde que a constante de proporcionalidade r e a taxa de juros i estejam relacionadas pela Equação (13). Testamos o modelo acima com o seguinte exemplo.

Suponha uma aplicação que renda 2% ao mês. Vamos encontrar o saldo como função do tempo, e o saldo após 12 meses, sendo saldo inicial de R\$500,00.

Podemos encontrar $s(t)$ pelo Problema do Valor Inicial (PVI).

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = rs \\ s(0) = 500 \end{cases}$$

como $r = \ln(1 + i)$:

$$r = \ln(1 + 0,02) \Rightarrow \ln(1,02) = 0,0198 \approx 0,02,$$

temos então que:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = 0,02s \\ s(0) = 500 \end{cases} \quad (14)$$

Como na Equação (11), a solução é:

$$\Rightarrow s(t) = s_0^{0,02t},$$

que é a solução geral da EDO. Como $s(0) = 500$, temos:

$$500 = s_0^{0,02 \cdot 0} \Rightarrow C = 500$$

Logo, a solução do PVI (14) é dada por:

$$s(t) = 500e^{0,02t}.$$

Agora calculando o saldo em 12 meses, para $t = 12$, temos:

$$\begin{aligned} s(12) &= 500e^{0,02 \cdot 12} = 500e^{0,24} \\ &\Rightarrow s(12) \cong 635,62 \end{aligned}$$

Assim, o saldo após os 12 meses é de R\$635,62.

Foi possível ver nesse problema resolvido que i e r foram iguais, isso sempre ocorrerá para valores pequenos de i , pois para que a EDO seja equivalente ao caso da capitalização, a taxa de proporcionalidade deve ser exatamente igual à taxa de juros nominal.

Comparando os valores obtidos no problema, é possível ver que existe uma diferença na casa das unidades, das dezenas e centenas. De acordo com Silva (2019), essa diferença se dá pela forma de aplicação das Equações (15) e (16).

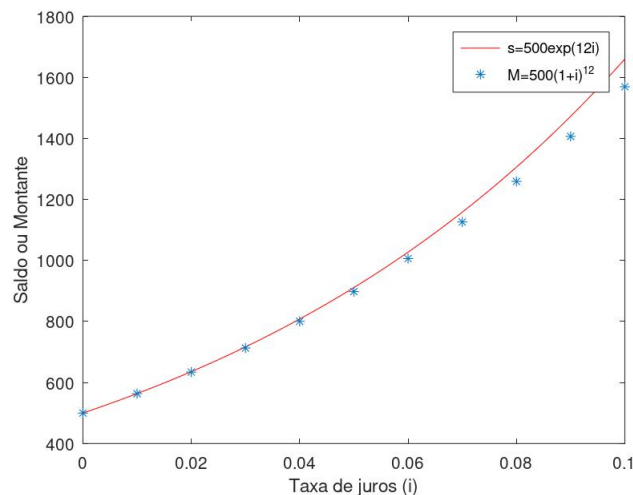
$$m = C \cdot (1 + i)^t \quad (15)$$

e

$$s(t) = s_0 e^{rt} \quad (16)$$

Na Equação (15), a função que relaciona M e t tem como domínio um conjunto discreto, ou seja, o tempo é em meses ou partes dele. Porém na Equação (16), o t é contínuo em todo \mathbb{R} . Na figura abaixo é possível observar, graficamente, a diferença do montante gerado pelas Equações (15) e (16), para $C = 500$ e $t = 12$, com variação na taxa de juros. Essa diferença é acentuada para taxas de juros maiores, ou seja, quanto maior a taxa de juros, maior será a diferença gerada pelos montantes das Equações (15) e (16).

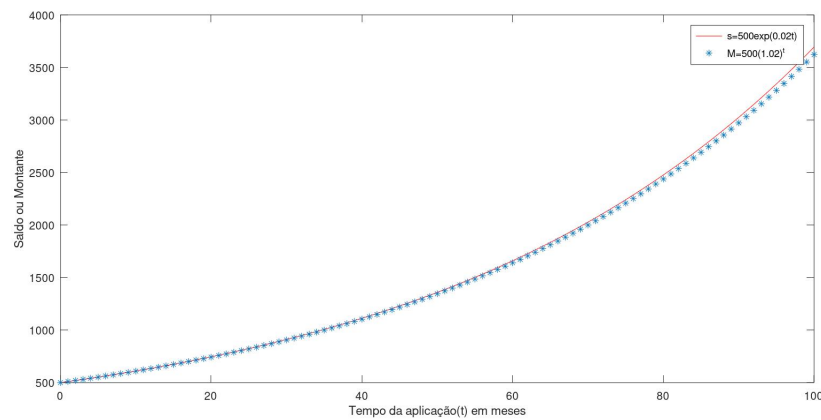
Figura 1 – :Gráfico gerados pelas funções das Equações (15) e (16), para $C = 500$ e $t = 12$, com a variação no montante em relação a taxa de juros.



Fonte: próprio autor.

No gráfico da Figura 2, são expostas as funções geradas pelas Equações (15) e (16), com o montante variando com o tempo para $C = 500$ e $i = 2\%$. É possível ver o aumento da diferença dos valores do montante calculados pelas Equações (15) e (16), entre os gráficos, com o passar do tempo, ou seja, quanto maior o tempo maior será a diferença entre os montantes.

Figura 2 – :Gráfico gerado pelas funções das Equações (15) e (16) que relaciona o montante com o tempo (em meses) para $C = 500$ e $i = 2\%$.



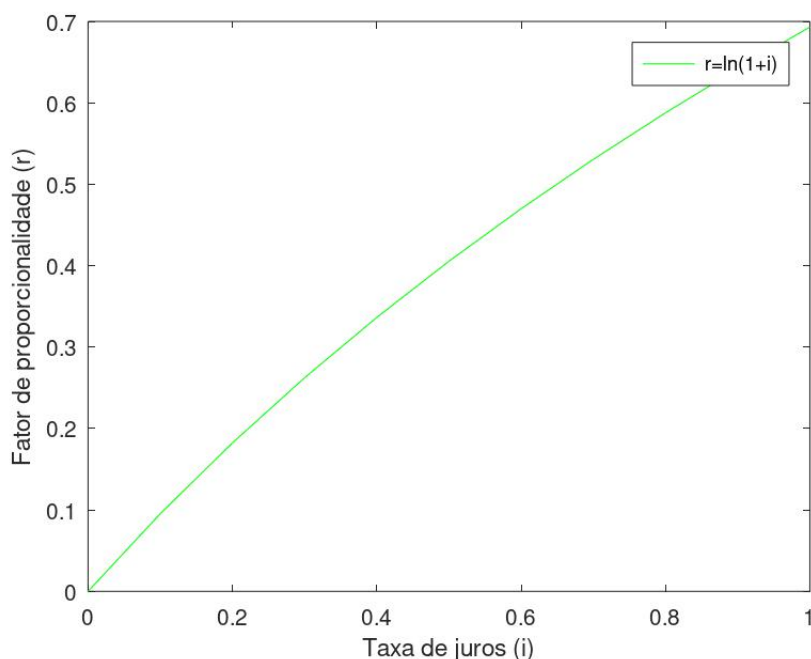
Fonte: próprio autor.

Com base nos gráficos das Figuras 1 e 2, concluímos que, quanto maior a taxa de juros e o período da aplicação do investimento, maior será a diferença gerada pelos montantes calculados pelas Equações (15) e (16). Objetivando reduzir a diferença gerada, Silva (2019) compara as duas Equações com a finalidade da obtenção de uma relação entre a taxa de juros i da Equação (15) e o fator de proporcionalidade r na Equação (16). Assim, com $s_0 = C$ e $s(t) = M$ temos:

$$C(1 + i)^t = Ce^{rt} \Rightarrow 1 + i = e^r \Rightarrow r = \ln(1 + i). \quad (17)$$

A relação entre a taxa de juros i da Equação (15), e o fator de proporcionalidade r na Equação (16), obtida pela Equação (17) pode ser vista graficamente na Figura 3.

Figura 3 – : gráfico da função gerada pela Equação (17), sendo no eixo horizontal a variação da taxa de juros i e no eixo vertical o fator de proporcionalidade.



Fonte: próprio autor.

A partir da Figura 3, é possível ver que no intervalo considerado para a taxa de juros, de 0 a 50%, o valor de i e r são bem próximos, há um distanciamento maior para valores mais próximos $i = 0,5$ (50%).

Agora, refazendo a aplicação anterior com r sendo calculado pela Equação (17). Assim:

$$r = \ln(1 + 0,02) \Rightarrow r \approx 0,0198$$

$$s(12) = 500e^{0,0198 \cdot 12} = 634,10 \quad (18)$$

Como o valor calculado do montante no Aplicação foi de $M = 634,12$ tivemos uma redução significativa na diferença entre o valor obtido pelas Equações (15) e (16) com a adequação de r pela Equação (17).

No segundo caso, Silva (2019) propõe que além do investimento inicial s_0 , sejam feitos depósitos ou saques continuamente a uma taxa constante d (sendo positivo para depósitos e negativo para saques), o saldo é encontrado através do Problema de Valor Inicial:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = rs + d \\ s(0) = s_0 \end{cases} \quad (19)$$

onde a equação pode ser reescrita como uma EDO linear de 1^a ordem, de acordo Equação (4):

$$\frac{ds}{dt} - rs = d. \quad (20)$$

Como visto no capítulo anterior, o processo de resolução será o via Fator Integrante $\mu(t) = e^{\int h(t)dt}$, com $P(t) = -r$, assim:

$$\mu(t) = e^{\int -r dt} = e^{-rt+C},$$

com $C = 0$, temos $\mu(t) = e^{-rt}$.

Utilizando a Equação (20) multiplicando por $\mu(t) = e^{-rt}$

$$e^{-rt} \frac{ds}{dt} - rse^{-rt} = de^{-rt} \quad (21)$$

Resulta em:

$$\frac{d}{dt}(e^{-rt}s) = de^{-rt} \quad (22)$$

Realizando o processo de Integração da Equação (22) em ambos os lados em relação a t temos:

$$\int \frac{d}{dt}(e^{-rt}s(t))dt = \int de^{-rt}dt \Rightarrow e^{-rt}s(t) = -\frac{d}{r}e^{-rt} + c \quad (23)$$

Logo:

$$s(t) = ce^{rt} - \frac{d}{r} \quad (24)$$

que é a solução geral da EDO (19). Como $s(0) = s_0$, iremos substituir na equação acima:

$$s_0 = ce^{r \cdot 0} - \frac{d}{r} \Rightarrow c = s_0 + \frac{d}{r}.$$

Isso nos leva até a solução:

$$\begin{aligned} s(t) &= (s_0 + \frac{d}{r})e^{rt} - \frac{d}{r} \\ s(t) &= s_0e^{rt} + \frac{d}{r}(e^{rt} - 1). \end{aligned} \quad (25)$$

Utilizando dessa aplicação proposta por Silva (2019), um exemplo do cotidiano seria a seguinte aplicação de investimento abaixo.

Suponha que uma pessoa aos 25 anos de idade abra uma conta com um investimento inicial de R\$2.000,00 e depois faz investimentos de forma anual de R\$2.400,00 de modo contínuo. Com uma taxa de juros de 7%*a.a.*, qual será o montante disponível quando essa pessoa tiver com 65 anos?

Temos que $r = \ln(1 + i)$, assim $r \cong 0,0676$. Como padronização, no exemplo abaixo foi utilizado $r = 0,07$

Iremos utilizar a Equação (25), realizando a substituição dos valores:

$$s(t) = 2000e^{rt} + \frac{2400}{r}(e^{rt} - 1) \Rightarrow s(t) = 2000e^{0,07t} + \frac{2400}{0,07}(e^{0,07t} - 1)$$

$$s(t) = 2000e^{0,07t} + 34285,71(e^{0,07t} - 1) \quad (26)$$

Como a aplicação é feita durante os 40 anos, temos $t = 40$, e realizando a substituição em (5.1), temos:

$$s(40) = 2000e^{0,07 \cdot 40} + 34285,71(e^{0,07 \cdot 40} - 1) \Rightarrow$$

$$s(40) \cong 562.419,97$$

Portanto, após os 40 anos a pessoa deve ter na conta aproximadamente $R\$562.419,97$.

Assim, como a comparação feita com as Equações (11) e (12), Silva (2019) também compara a Equação (25), no qual os depósitos ou saques são realizados em intervalos constantes, com a Equação (1) de Juros Compostos, onde os intervalos considerados são discretos (mês a mês, ano a ano, etc). Dessa forma, relacionando o montante m com o saldo ($s(n)$), após n unidades de tempo, e somando depósitos D constantes a cada período n , temos a reescrita da Equação (1) de Juros Compostos como:

$$s(1) = s_0(1 + i) + D$$

$$s(2) = s(1)(1 + i) + D = s_0(1 + i)^2 + D(1 + i) + D$$

$$s(3) = s(2)(1 + i) + D = s_0(1 + i)^3 + D(1 + i)^2 + D(1 + i) + D$$

Generalizando temos:

$$s(n) = s_0(1 + i)^n + [D + D(1 + i) + D(1 + i)^2 + \dots + D(1 + i)^{n-1}] \quad (27)$$

Como ($s_{nD} = D + D(1 + i) + D(1 + i)^2 + \dots + D(1 + i)^{n-1}$) é a soma dos termos de uma Progressão Geométrica (PG) finita, com $(1 + i)$ sendo a razão, assim, utilizaremos a fórmula da soma geral de uma PG como:

$$s_{nD} = D \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \quad (28)$$

Realizando a substituição de (28) em (27) temos:

$$s(n) = s_0(1 + i)^n + D \left(\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right) \quad (29)$$

Em seguida, realizando a substituição de t por n na Equação (25) e realizando a comparação com a Equação (29).

$$s_0 e^{rn} + \frac{d}{r}(e^{rn} - 1) = s_0(1+i)^n + D\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \quad (30)$$

Temos que, como visto no primeiro caso, de acordo com Silva (2019), como a taxa de proporcionalidade r na Equação Diferencial e a taxa de juros i estão relacionados por (13), pois elas descrevem o processo de crescimento proporcional ao valor do montante.

$$\frac{d}{r} = \frac{D}{i} \quad (31)$$

Usando a igualdade em (13), como $r = \ln(1+i)$, temos:

$$\frac{d}{\ln(1+i)} = \frac{D}{i} \quad (32)$$

$$d = \frac{\ln(1+i)D}{i} \quad (33)$$

se $i = e^r - 1$, temos:

$$\frac{d}{r} = \frac{D}{e^r - 1} \quad (34)$$

Logo,

$$d = \frac{\ln(1+i)D}{i} \quad (35)$$

Realizando um novo exemplo com o investimento na poupança temos: A poupança acumula 7% de juros ao ano, compostos de forma contínua, com saques de R\$ 2100,00 por ano. Escreva o PVI onde a equação diferencial seja satisfeita pelo saldo $s(t)$ da conta no tempo t .

No caso acima temos o seguinte PVI, de acordo com a Equação (19):

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = rs - d \\ s(0) = s_0 \end{cases} \quad (36)$$

Assim, substituindo os dados no PVI:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = 0,07s - 2100 \\ s(0) = s_0 \end{cases} \quad (37)$$

Reescrevendo a equação acima temos:

$$\frac{ds}{dt} - 0,07s = -2100 \quad (38)$$

Calculando o Fator Integrante (6) da equação (38), com $h(t) = -0,07$ temos:

$$\mu(t) = e^{\int -0,07dt} = e^{-0,07t+c}$$

Para o $c = 0$, obtemos o Fator Integrante $\mu(t) = e^{-0,07t}$. Multiplicando a equação (38) pelo Fator Integrante:

$$e^{-0,07t} \frac{ds}{dt} - 0,07e^{-0,07t}s = -2100e^{-0,07t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-0,07t}s) = -2100e^{-0,07t} \quad (39)$$

Realizando a integração em ambos os lados em relação a t :

$$\int \frac{d}{dt}(e^{-0,07t}s(t))dt = \int -2100e^{-0,07t}dt$$

$$s(t) = ce^{0,07t} + 30000 \quad (40)$$

que é a solução da EDO (38).

Como o $s(0) = s_0$, substituindo $t = 0$ e $s = s_0$ temos:

$$s_0 = ce^{0,07 \cdot 0} + 30000 \Rightarrow s_0 = c + 30000 \Rightarrow c = s_0 - 30000 \quad (41)$$

Substituindo (41) em (40) temos que a solução do PVI (38):

$$s(t) = (s_0 - 30000)e^{0,07t} + 30000 \Rightarrow s(t) = s_0e^{0,07t} - 30000(e^{0,07t} - 1) \quad (42)$$

5.2 Análise 2: Barbosa (2022)

De modo a complementar o levantamento, foi selecionada a monografia do autor Barbosa (2022), com o título "Capitalização a Juros Compostos através da Matemática Financeira e da EDO de 1° Ordem", disponibilizada na Biblioteca Digital de Monografias da Universidade Federal do Pará. Nesse material foram abordadas algumas modelagens usando as EDOs no contexto da Capitalização com Depósito Único. Podendo ser simples (ou linear) e composto (ou exponencial).

Barbosa (2022), busca como objetivo apresentar duas modelagens, uma direcionada para o cálculo da Matemática Financeira e a outra abordagem usando as Equações Diferenciais Ordinárias de 1° Ordem. Para resolver essas questões, o autor propõe a aplicação da capitalização a juros compostos com a utilização do Software Excel. Além disso,

ele enfatiza que existe uma relação da Matemática Financeira com operações que envolvem finanças, dentre elas destacam-se as operações com dinheiro, compra de imóveis, empréstimos ou os investimentos.

Na construção dessa pesquisa, o autor utiliza conteúdos de Juros Compostos e métodos de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem. Como método de organização do trabalho, esse encontrasse dividido em seis capítulos. O segundo capítulo aborda os conceitos da Matemática Financeira. O terceiro capítulo, as Aplicações usando o aporte teórico do capítulo anterior. O quarto capítulo aborda teoricamente as Equações Diferenciais Ordinárias. O quinto capítulo apresenta modelagens realizadas através das Equações Diferenciais e a comparação dos resultados obtidos no terceiro capítulo. No sexto capítulo, a análise dos resultados dos terceiro e quinto capítulos, e expande-se com construções de tabelas e gráficos usando o software Excel.

Conforme Barbosa (2022), a capitalização a juros compostos sobre um investimento com depósito único, considerando a capitalização contínua, pode ser modelada por uma Equação Diferencial Ordinária de 1º Ordem, sendo esta a mesma EDO utilizada no material de Silva (2019), como poderá ser visto no exemplo a seguir.

Supondo que um valor inicial S_0 , em dinheiro, seja depositado num banco que paga uma taxa anual de juros r . Para encontrar a taxa r em função do tempo t , é utilizada a seguinte EDO, onde a taxa de variação do valor do investimento S é representada por:

$$\frac{dS}{dt} = rS \quad (43)$$

com solução

$$S(t) = S_0 \cdot e^{rt} \quad (44)$$

A Equação (44) representa o montante $S(t)$ após a aplicação de um capital S_0 a uma taxa constante r por um período de tempo t , em meses. Conforme Barbosa (2022), essa equação também pode ser utilizada para a Caderneta de Poupança, como pode ser visto no seguinte exemplo:

Supondo uma aplicação de R\$ 22.000,00 em caderneta de poupança por 2 anos, com a capitalização de juros uma vez por ano, no qual a taxa de rendimento é de 0,8% ao mês. Temos $r = 0,008$ e $t = 24$ meses. Substituindo os valores temos:

$$\begin{aligned} S(24) &= 22.000 \cdot e^{0,008 \cdot 24} \\ S(24) &= R\$26.656,75 \end{aligned}$$

Isso significa que a aplicação de R\$ 22.000,00 em 2 anos resulta em R\$ 6,656,75 de juros. Resultado semelhante a Silva (2019).

Conforme Barbosa (2022), a análise dos dados do comparativo entre as modelagens da Matemática Financeira e das EDOs, mostram que para taxas de até 6% os dados

são bastante similares nas aplicações. Apenas em taxas de acima de 17% que as curvas divergem os valores absolutos em 0,53.

5.3 Análise 3: Freitas (2019)

O material seguinte selecionado foi o de Freitas (2019). A monografia aborda os investimentos de capitalização de juros compostos, que são investimentos com depósito único, com depósitos e retiradas e a caderneta de poupança. Além disso, a realização de comparativos através de sites de simulação de Previdência Privada.

A estrutura do trabalho está dividida em seis capítulos, seguindo o padrão dos demais pesquisadores da área, através de explanação da fundamentação teórica acerca da Matemática Financeira, sobre as Equações Diferenciais e as aplicações em software.

É possível destacar outra aplicação da EDO, a Previdência Privada, conforme Freitas (2019), essa simulação pode ser modelada como um problema de valor inicial. Assim como em Silva (2019), é possível também utilizar a Equação (25) para resolver tal aplicação.

Considere um individuo de 25 anos que queira se aposentar aos 65 anos, assim queremos saber quanto essa pessoa deverá contribuir mensalmente por 40 anos para receber uma renda vitalícia mensal de R\$1000,00 após sua aposentadoria. Como investimento inicial será R\$9.334,17, com um plano de 4% ao ano e que renda uma reserva de R\$208.574,94

A resolução desse problema é dada por: Para encontrar o valor de d , que é o valor dos depósitos, iremos considerar o montante acumulado de R\$208.574,94 depois dos 40 anos, ou seja, 480 meses. Para calcular a taxa mensal equivalente a $r = 4\%$ ao ano, deve-se usar a Equação (2).

$$r_m = (1 + 0.004)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$r_m = 0,003274$$

Utilizando a Equação (25):

$$208.574,94 = \frac{d}{0,003274}(e^{0,003274(480)} - 1) + 9.334,17(e^{0,003274(480)}) \quad (45)$$

$$208.574,94 - 44942,00 = 1165,00d$$

$$d = 140,47$$

Logo a parcela deve ser de R\$140,47

A partir desses conceitos e equações, é possível notar que existem aplicações dentro do contexto da Matemática Financeira que fazem uso das Equações Diferenciais para gerar os montantes. Com base nisso, abaixo temos alguns investimentos que estão presentes no Brasil, e que possuem situações que envolvam a Equação Diferencial.

5.4 Análise 4: Meneses (2022)

Uma primeira similaridade notável entre o trabalho de Meneses (2022) e os de Silva (2019), Barbosa (2022) e Freitas (2019) reside na estrutura metodológica e didática. Assim como os demais autores, Meneses (2022) optou por dedicar os capítulos iniciais para estabelecer, de forma separada, os fundamentos teóricos necessários das Equações Diferenciais e, em seguida, apresentar suas aplicações. Essa abordagem, que consiste em construir a base conceitual e em seguida a modelagem prática, é um traço comum que unifica as obras, refletindo uma preocupação em guiar o leitor gradualmente desde os princípios matemáticos até sua utilização nos contextos específicos.

A principal convergência está no modelo matemático central utilizado para a capitalização de juros com depósito único. O trabalho de Meneses (2022) formula o problema a partir da Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem $\frac{dS}{dt} = rS$, com a condição inicial $S(0) = S_0$. Este é exatamente o mesmo Problema de Valor Inicial (PVI) empregado por Silva (2019) e Barbosa (2022) como ponto de partida para descrever a capitalização contínua. Como consequência direta, todos os trabalhos derivam a mesma solução exponencial, $S(t) = S_0e^{rt}$, para representar o saldo do investimento ao longo do tempo.

Além do modelo fundamental, as semelhanças se estendem às aplicações mais elaboradas, como investimentos com depósitos contínuos. Meneses (2022) avança a discussão ao introduzir uma taxa constante de depósitos ou saques, modelada pela equação não-homogênea $\frac{dS}{dt} = rS + k$. Esta progressão é análoga à desenvolvida por Silva (2019) e aplicada por Freitas (2019) em cenários de Previdência Privada. A utilização do método do fator integrante para solucionar esta EDO é outra técnica compartilhada, demonstrando um consenso na abordagem para modelar situações financeiras mais dinâmicas que envolvem contribuições periódicas.

6 Conclusão

Este trabalho, através de um levantamento bibliográfico, trouxe algumas aplicações das EDOs dentro do contexto da Matemática Financeira. Reuniram-se materiais que envolvem essa temática, além de desenvolver questões da Matemática Financeira, como a capitalização de juros com Depósito Único, a capitalização de juros com Depósitos Contínuos, a Cardeneta de Poupança e a Previdência Privada, com o uso das EDOs. Podemos destacar que Matemática Financeira está profundamente presente no nosso cotidiano e sendo as aplicações aqui selecionadas com o objetivo de evidenciar esse fato.

Um resultado importante encontrado foi a comparação das Equações básicas da Matemática Financeira com o uso das EDOS, que devido as características da Exponencial, a diferença entre os resultados é mínima e faz com que seja possível considerar o uso da Equação Diferencial Ordinária para as aplicações presentes nesse trabalho.

Entretanto devido a Matemática Financeira ser uma área do conhecimento bastante ampla, destaca-se que ainda é possível pensar em expandir ainda mais as aplicações com o uso de outras Equações Diferenciais, todavia deve-se expandir o período de pesquisa para a realização de um levantamento bibliográfico.

Referências

- BARBOSA, Gleykson Corrêa. Capitalização a juros compostos através da matemática financeira e da E.D.O de 1° ordem. **Faculdade de Matemática - FAMAT/CBRAG**, UFP, Bragança, PA, BRA, p. 59, 2022.
- BASSANEZI, R. C. **Equações diferenciais com aplicações**. Brasil: Editora Harbra, 1988. v. 1.
- BOYCE, William E. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Brasil: LTC Livros Técnicos e Científicos Editora LTDA, 2020. v. 11.
- FONSECA, João José Saraiva da. Metodologia da Pesquisa Científica. **UEC**, UEC, Fortaleza, CE, BRA, p. 127, 2002.
- FREITAS, Elisandra Konflanz. Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem: aplicações na Economia. **FURG**, FURG, Rio Grande, RS, BRA, p. 80, 2019.
- GONÇALVES, Jean Piton. A História da Matemática Comercial e Financeira. **So Matematica**, So Matematica, <https://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php>, p. 10, 2005.
- MANCINI M.C., Rosana F. Sampaio e. Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. **Revista Brasileira de Fisioterapia**, Revista Brasileira de Fisioterapia, São Carlos, SP, BRA, p. 89, 2007.
- MENESES, Francisco Jair Felismino. Equações Diferenciais e Algumas Aplicações. **Universidade Federal do Ceará**, UFC, Ceará, CE, BRA, p. 63, 2022.
- NETO, Alexandre Assaf. **Matemática financeira e suas aplicações**. Brasil: Editora Atlas, 2009. v. 1.
- PUCCINI, Ernesto Coutinho. **Matemática Financeira e Análise de Investimentos**. Brasil: Universidade Federal de Santa Catarina, 2011. v. 1.
- SCHNEIDER, Ido José. Matemática financeira: alguns elementos históricos e contemporâneos. **Universidade Estadual de Campinas**, UNICAMP, Campinas, SP, BRA, p. 20, 2010.
- SILVA, Marcelo Rodrigues da. Matemática Financeira: do Estudo Algébrico à Aplicações com Equações Diferenciais Ordinárias. **Universidade Federal do ABC**, UFABC, Santo André, SP, BRA, p. 154, 2019.

YARTEY, Joseph Nee Anyah. **EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**. Brasil: Instituto de Matemática e Estatística, 2017. v. 1.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. Estados Unidos: Cengage Learning, 2016. v. 10.