



Uso do GeoGebra para aprendizagens de funções trigonométricas

Use of GeoGebra for learning trigonometric functions

CARLOS ROBERTO BASTOS GOMES¹

BRUNO CESAR CONCEIÇÃO DOS SANTOS²

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma pesquisa sobre o uso de tecnologia digital no ensino de matemática. Mais especificamente, estuda o uso do software de natureza dinâmica GeoGebra como recurso facilitador em aprendizagens das funções seno e cosseno e algumas de suas variações, onde para isso foi proposta a criação de applets e roteiros de estudos para aplicação em uma sala de aula da 2ª série do ensino médio. Um software que reúne a possibilidade de dar diferentes representações do mesmo objeto matemático. Traçado um percurso qualitativo, constatou-se a eficácia do uso do GeoGebra, uma vez que aumentou significativamente a participação, interesse e protagonismo dos estudantes, favorecendo o aprendizado dos conteúdos.

Palavras-chave: GeoGebra; função trigonométrica; TDIC.

ABSTRACT

This work presents a research on the use of digital technology in teaching mathematics. More specifically, it studies the use of the dynamic software GeoGebra as a facilitating resource in learning the sine and cosine functions and some of their variations, where the creation of applets and study guides for application in a 2nd grade classroom was proposed high school series. Software that finds the possibility of different representations of the same mathematical object. After tracing a qualitative path, the use of GeoGebra was found to be effective, as it significantly increased student participation, interest and protagonism, favoring the learning of content.

Key-words: GeoGebra; trigonometric function; ICDT.

Introdução

O uso de tecnologias digitais na educação vem sendo pesquisado por diversos setores da educação, buscando compreender possíveis potencialidades como meio para um processo ensino-aprendizagem mais efetivo e significativo, que por um lado, tenha-se um estudante participativo e protagonista na aquisição de conhecimento, não um depositário de conteúdos, e, por outro lado, um professor no seu papel mediador e facilitador da aprendizagem, e não um mero depositante de conteúdos (Freire, 2017).

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), estendidas para um conceito mais abrangente envolvendo o termo ‘digitais’, no que resulta nas Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), são tema de estudos nos diferentes níveis da educação e em diversas áreas do conhecimento (Borba, Penteadó, 2019). Em particular, a presente

¹ Colégio Estadual Professor Nelson Barros – carlos.bastosgomes@gmail.com

² Colégio Estadual de Tempo Integral Zumbi dos Palmares – bruno.cesar.11@gmail.com



pesquisa contempla uma investigação com estudantes de uma turma da 2ª série do ensino médio sobre a temática de aprendizagens de funções trigonométricas através do software GeoGebra³, onde foi proposto construir applets e roteiros de estudo.

É de notar que o estudo de funções trigonométricas possibilita, em diferentes áreas do conhecimento, a compreensão de fenômenos periódicos como o movimento das marés, dos planetas, de rodas-gigantes e de pistões veiculares, ondas sonoras, pressão arterial, tensão elétrica, variação de temperatura em uma localidade e muitos outros, como apontado por Santos e Effen (2018). Além da abordagem prática, esse estudo permite uma teorização para outros ramos mais avançados da matemática superior.

Um entendimento algébrico, tabular, gráfico e textual de funções trigonométricas, apenas com exposição no quadro de sala de aula e/ou no papel, tendem a apresentar dificuldades às aprendizagens, pois muitos alunos não conseguem imaginar outras situações semelhantes, abstrair resultados e os cálculos e traçados gráficos já não são tão simples, demandam certo tempo para construção, o que de certa maneira pode desviar o foco do entendimento dos conceitos e propriedades matemáticas. Dessa forma, estabelece a questão se o recurso computacional pode diminuir ou sanar esses entraves. O que permitir indagar: O uso do GeoGebra pode ser um facilitador às aprendizagens de funções trigonométricas?

Diante o exposto, busca-se experimentar o uso do GeoGebra como meio facilitador para aprendizagens de funções trigonométricas, mais especificamente, a função seno e função cosseno e algumas variações destas, a saber as funções $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $f(x) = a + b \sin(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cos(cx + d)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $b, c \neq 0$, que são comumente estudadas na 2ª série do ensino médio. O que para isso, iniciaremos da compreensão do círculo trigonométrico às definições das funções seno e cosseno, seguidas de propriedades e traçado gráfico.

À frente é apresentada uma revisão de literatura, onde são expostos alguns trabalhos que seguem uma direção semelhante a esta. Observa-se que o tema abordado é o mesmo, porém há diferentes escolhas na mediação pedagógica tanto no ensinar como no uso em si do GeoGebra, favorecendo múltiplos caminhos a serem pesquisados. Em seguida, é feito um alicerce teórico de autores que refletem sobre o uso de tecnologias na educação, em destaque para o ensino da matemática. É investigado o uso do GeoGebra como um possível potencial para interação significativa do estudante com o objeto de aprendizagem.

1. Revisão de literatura

Muitos trabalhos têm sido publicados na direção do estudo de funções trigonométricas através do software GeoGebra. Uma busca no banco⁴ de dissertações de mestrado do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) com tag ‘funções trigonométricas’ é remetido a doze dissertações, entre 2013 e 2020, que trazem no tema as

³ <https://www.geogebra.org/>

⁴ www.profmatt-sbm.org.br/dissertacoes/



expressões ‘funções trigonométricas’ e ‘GeoGebra’, e cinquenta, entre 2013 e 2024, se observado apenas a expressão ‘funções trigonométricas’, sendo que algumas destas trazem no escopo do trabalho a abordagem do GeoGebra.

Pereira (2015), em sua dissertação, traz luz para a proposta de criação de Applets, onde teve como produto educacional um blog que contém Applets e sugestões de sequências didáticas para um tratamento teórico. Nas suas considerações é apontado que “os Applets criados no GeoGebra, em geral, facilitam a compreensão de trigonometria” (p. 92), desde que “a sequência didática aplicada siga uma metodologia adequada de elaboração e de aplicação” (p. 93).

Santos e Effen (2015) dão um tratamento algébrico preciso dos resultados nas variações dos parâmetros a , b , c e d mencionados na introdução. O que pode ser usado em paralelo para uma investigação dentro do GeoGebra com os controles deslizantes. Propõem também que os estudantes façam construções no software através de comandos, o que pode demandar um tempo maior de trabalho, pois é preciso conquistar certas habilidades com o software.

Carvalho (2020) traz uma reflexão teórica e contextualizada de funções trigonométricas e propõe um roteiro para o seu ensino através do GeoGebra. Em suas conclusões, apesar de ele não ter aplicado em sala de aula, ele espera que seja feita uma aplicação futura para verificação de sua eficácia.

Lopes (2010) traz outros conteúdos de trigonometria além de funções trigonométricas usando o GeoGebra, apresentando sugestões de sequências didáticas e concluindo que “o uso de software GeoGebra pode auxiliar na resolução de problemas de trigonometria, especialmente em atividades investigativas” (p. 94).

Oliveira (2019) traz uma revisão de literatura, no banco de dissertações de mestrado do PROFMAT, após fazer uma busca com as palavras ‘trigonometria’ e ‘trigonométricas’. Ela confirma pesquisas voltadas para o uso de tecnologias digitais e abordagens para aplicações, destacando que a maioria das dissertações se utiliza de resultados de práticas em sala de aula para defesa de suas concepções.

2. Referencial teórico

Quando se fala em tecnologia, apoia-se no conceito mais amplo, para além dos celulares, automóveis e máquinas industriais, por exemplo, como alguém pode apenas pensar. É um termo polissêmico e multifacetado. Entende-se, segundo Kenski, como “... o conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade” (2013, p. 24). Desse modo, desde os primórdios a humanidade vem se utilizando de variadas tecnologias como a pedra, madeira e metal. No campo da educação vemos os livros, o quadro negro e o giz como tecnologias para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem.

Dado um processo contínuo do surgimento de novas tecnologias, vive-se o momento das chamadas tecnologias digitais (TD) que têm revolucionado as mais diversas áreas do



conhecimento no seu modo de informar e se comunicar. Borba, da Silva e Gadanidis (2020) demarcam quatro fases das tecnologias digitais no ensino de matemática. Iniciando em 1980, discutia se era adequado ou não o uso de computadores no contexto escolar. Por volta de 1990, na segunda fase, softwares matemáticos, como Maple e Winplot, permitiam uma forma interativa de aprendizagem. Em 1999, com o avanço da internet, delinea-se a terceira fase, onde há uso constante de fóruns, e-mail e chats nas informações e comunicações. Nesse momento, expressões como Tecnologias da Informação (TI) e Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) eram utilizadas. Na quarta, em 2004, a internet vai tendo maior velocidade de transmissão de dados. O termo digital passa a ser incorporado ampliando a terminologia digital para Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), valendo-se de vídeos, imagens 3D, rede sociais e outros.

Para o ensino da matemática, tecnologias digitais vêm abrindo novas possibilidades de interação com objetos matemáticos, cabendo ao professor escolher ferramentas que julgue contribuir para que o estudante consiga compreender os conceitos ensinados. Sendo que, trabalhos de pesquisa têm sido concluídos no sentido de dizer que não é o uso por si só de novas tecnologias que vão favorecer aprendizagens matemáticas, mas o traçado metodológico pelo qual o professor irá escolher para fazer uso de alguma(s) TDIC terá a possibilidade de potencializar ou não uma aprendizagem significativa. Nessa linha, Felcher e Folmer dizem “... a formação do professor deve convergir para o uso potencializador das tecnologias digitais nos processos de ensino e aprendizagem, ...” (2021, p. 116). Outros autores corroboram:

As Tecnologias Digitais (TD) podem trazer contribuições significativas para o processo de ensino e aprendizagem de matemática, desde que seja utilizada de maneira adequada ao processo de ensino. Porém, recursos tecnológicos sozinhos não trarão bons resultados para a educação, pois é preciso que a comunidade escolar conheça suas potencialidades e limites a fim de melhorar o processo de ensino e aprendizagem. (Basniak; Silva; Gaulovski, 2017, p.1)

Donde compreendemos que “... as TIC são capazes de atingir suas finalidades de uma intercomunicação realmente libertadora; se usarmos de maneira correta e consciente sobre os recursos e sua incumbência no meio educativo.” (Lima; Araújo, 2021, p.4). Nesse sentido, apresentaremos mais à frente o caminho escolhido através de roteiros de estudos, para que os estudantes pudessem participar ativamente de suas aprendizagens, e da criação de applets que foram aplicados nessa pesquisa.

Destaca-se que o uso da internet e de dispositivos móveis, como o celular, tablets e computadores, associados a softwares, arquivos e páginas web, permite ao professor informar e comunicar conteúdos ricos em interação, não somente o sair de uma leitura impressa para uma digital. Abre-se portas para hipertextos virtuais, simulações, aulas gamificadas, trabalho com objetos dinâmicos, fóruns, ambientes virtuais de aprendizagem (AVA), realidade aumentada (RA) e muitos mais. Em particular, destaca-se o software gratuito GeoGebra, a tecnologia utilizada nessa pesquisa, criado por Markus Hohenwarter em 2001 e pode ser baixado ou acessado online pelo computador, smartphone e tablet, contemplando álgebra, geometria (2D e 3D), cálculo e estatística. Tem uma interface amigável, realiza diversos tipos

de cálculos e, com grande diferencial, a possibilidade de interação através de *construções dinâmicas* de objetos que permitem ser movidos com um simples arrastar ou alteração de parâmetro nos chamados ‘controles deslizantes’, em que o estudante pode simular, testar hipóteses, dar respostas e conjecturar, permitindo um distanciamento da passividade em seu processo de aprender, ganhando uma aproximação de protagonismo.

A dinâmica do movimento, oportunizada pelo software, permite uma vasta possibilidade de testes e análises, que no processo da construção via instrumentos de desenho, fica seriamente prejudicada, devido à morosidade e as dificuldades da construção, que passam a ser o fator desmotivador da aprendizagem ou da investigação. (Petla; Rolkouski, 2008, p. 23)

O que também é confirmado por Cardoso (2019, p.51): “Vimos que, por meio do software Geogebra podemos criar, construir e desenvolver objetos de aprendizagem, bem como manipulá-los para uma melhor obtenção do conhecimento relativo ao estudo do mesmo e uma maior fixação dos conteúdos pelos alunos.”

Outra característica marcante é a possibilidade de dar diferentes representações matemáticas, como apontado na teoria de Registros de Representação Semiótica (Duval, 2012), a objetos matemáticos através de diferentes formas: algébrica, geométrica, tabular e textual. O que na falta de tais representações, Dionizio e Brandt (2011) apontam dificuldades para aprendizagens em trigonometria.

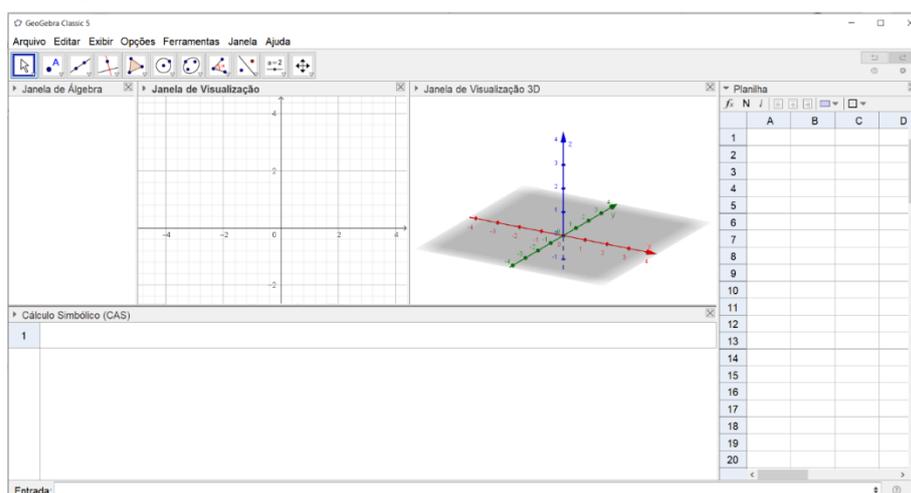


FIGURA 1. Tela do GeoGebra com diferentes janelas.

Outras características se somam ao GeoGebra: uma biblioteca com recursos prontos de compartilhamento mundial que podem baixados, experimentados, utilizados e modificados; uma plataforma sala de aula, GeoGebra Classroom, onde é possível criar um ambiente interativo com diferentes recursos em que o professor pode acompanhar o movimentar pelo estudante em tempo real, ou a posteriori. Para o conhecimento de funcionalidade de uso do GeoGebra através de textos, vídeos e curso, indicamos o Projeto ‘ogeogebra’ no site www.ogeogebra.com.br.



Nesse trabalho, não adentraremos em detalhamento de razões de possível não utilização de TDIC na educação por muitos professores, as quais podem estar voltadas para a falta de recursos materiais, formação inicial e/ou continuada, tempo para preparação de aulas, rompimento da zona de conforto, dentre outros motivos. Uma indicação de discussão pode vista em Schuhmacher, Filho e Schuhmacher (2014). Aqui, focaremos em apresentar uma investigação de seu uso.

Quanto à legislação nacional no tocante ao estudo de funções trigonométricas e uso das TDIC, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) indica competências e habilidades para os estudantes alcançarem.

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 9).

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. (BRASIL, 2018, p. 536)

(EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 539)

Vejamos agora o caminho escolhido para percorrer a pesquisa.

3. Percurso metodológico

Esse trabalho foi realizado em uma perspectiva de pesquisa qualitativa em uma turma da 2ª série do ensino médio no Colégio Estadual Professor Nelson Barros na cidade de Salvador, onde o primeiro autor desse trabalho atua como professor efetivo.

A proposta é de investigar o uso do GeoGebra através de criação de Applets no estudo das funções tipos $f(x) = a + b \sin(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cos(cx + d)$, como dito na introdução. Para isso, utilizou-se a versão online do GeoGebra Classic e criado três Applets.

Applet 1.

Título. Função seno e cosseno: Atividade N1

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/xf9bgwzm>

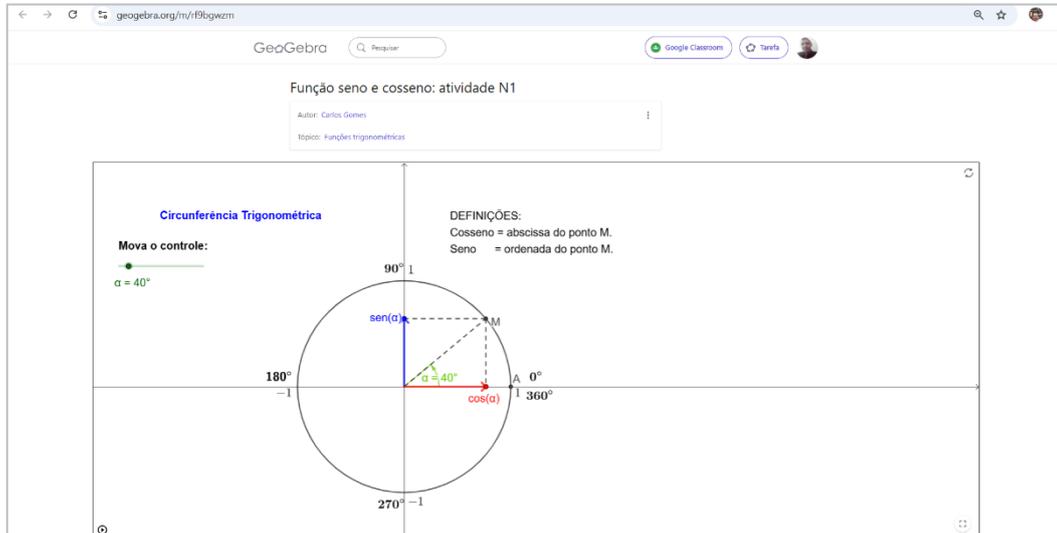


FIGURA 2. Tela do Applet 1 referente a atividade N1.

Applet 2.

Título. Função seno e cosseno: atividade N2.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/thmm4dxu>

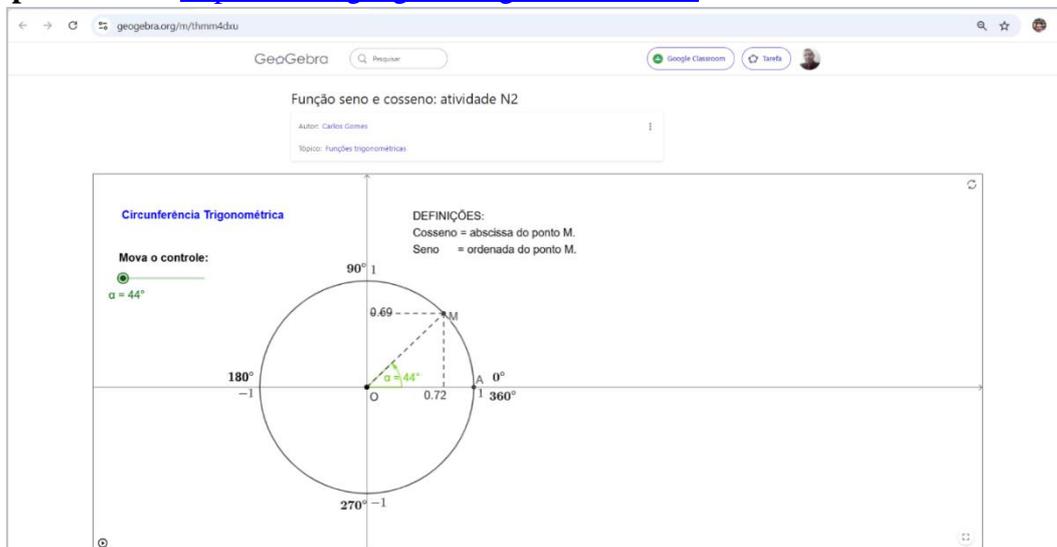


FIGURA 3. Tela do Applet 2 referente a atividade N2.

Applet 3.

Título. Funções seno e cosseno: variações

Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/h6u5crbm>

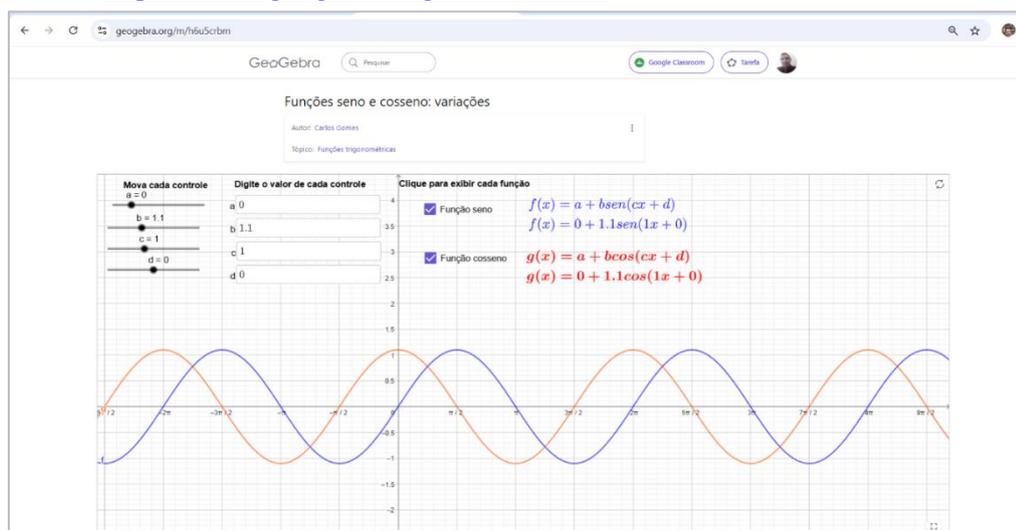


FIGURA 4. Tela do Applet 3 referente a atividade N3.

Na condução para o uso do GeoGebra e dos três Applets criados foram disponibilizados quatro roteiros de estudos, onde os estudantes iam interagindo e respondendo com orientação do professor em um trabalho colaborativo em dupla de estudantes. Quanto ao tempo disponibilizado para realização de cada roteiro, fico assim distribuído: 40 min para o roteiro 1, 80 min para o roteiro 2, 80 min para roteiro 3 e 40 min para o roteiro 4. À frente são disponibilizados os roteiros aplicados com os respectivos objetivos delineados. Destaca-se que na versão impressa para os estudantes deu-se maior espaçamento entre as linhas do texto e com os planos cartesianos um pouco maiores para uma melhor percepção visual. As aplicações digitais foram acessadas por chrome books e smartphones.

O percurso é de um desenvolvimento teórico em etapas até chegar nas variações das funções seno e cosseno com parâmetros a , b , c e d já citados. O conjunto da mediação docente, applets e roteiros de estudos foi construído como possibilidade de interação ativa para os estudantes.

No roteiro 1, usando o applet 1, é disponibilizada uma indicação geométrica da definição de seno e cosseno percorrendo todo o círculo trigonométrico (CT) e algumas de suas características, a saber, alguns de seus valores, intervalo de variação e sinal. É uma proposta de investigação dinâmica, onde é possível movimentar o ponto M que percorre todo o CT, seja diretamente pelo ponto ou descolocando o controle α . Na abscissa e na ordenada do ponto M estão as expressões $\text{sen}(\alpha)$ e $\text{cos}(\alpha)$, respectivamente. A variação de α está $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$

Quanto ao roteiro 2 com o applet 2, busca-se, para as funções seno e cosseno, estudar os intervalos de crescimento e decrescimento, a periodicidade e o traçado gráfico. É programado $0^\circ \leq \alpha \leq 1110^\circ$, permitindo 3 voltas no CT. Na abscissa e na ordenada do ponto



M estão os valores do $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$, respectivamente. No canto inferior esquerdo, também no RE1, tem o botão de animação \odot , em que é possível clicar, colocando o ponto M a percorrer todo o CT.

Já no roteiro 3, fazendo uso do applet 3, procura-se investigar o comportamento das funções variando os parâmetros a , b , c e d , um de cada vez por meio dos controles ou digitando o valor nas caixas, sendo útil a digitação quando se quer colocar valores já pré-fixados. Nos três Applets tem o botão \curvearrowright que serve para restaurar à janela padrão.

Por fim, no roteiro 4, é proposto o traçado manual do gráfico das funções seno e cosseno no intervalo $[-2\pi, 4\pi]$ e estudar uma aplicação no movimento de roda gigante através de sua função posição $h(t) = 12 + 4\sin(2\pi t)$, para h em metros e t em minutos, confirmando os resultados através do GeoGebra e buscando consolidar os conceitos até então estudados.

ROTEIROS DE ESTUDOS

ROTEIRO DE ESTUDO 1 (RE1)

Atividade: N1

Data: _____

Duração: 40 minutos

Nomes:

Objetivos:

- Identificar a variação de ângulo em cada quadrante.
- Compreender o que é a função seno e cosseno na circunferência trigonométrica.
- Indicar os valores do seno e cosseno para os ângulos 0° , 90° , 180° , 270° e 360° , tabulando os valores.
- Indicar o intervalo de variação das funções seno e cosseno.
- Estudar o sinal do seno e cosseno em cada um dos quadrantes.

VÁ MOVIMENTANDO O CONTROLE E RESPONDENDO

Questão 1. Observe a circunferência trigonométrica e escreva o intervalo de variação do ângulo para cada quadrante.

	1° Q	2° Q	3° Q	4° Q
Varição do ângulo				

Questão 2. Mova o controle e observe a variação dos valores do seno e cosseno para ângulos variando de 0° a 360° .

Questão 3. Com base na questão 2, para quais ângulos, entre 0° e 360° , o seno e cosseno possuem o mesmo valor?

Questão 4. Utilizando o controle, marque os ângulos indicados e preencha a tabela a seguir.

	0°	90°	180°	270°	360°
SENO					
COSSENO					

Questão 5. Marque o correto: o valor do seno é igual a zero para ângulos na



- () vertical.
 () horizontal.

Questão 6. Marque o correto: o valor do cosseno é igual a zero para ângulos na

- () vertical.
 () horizontal.

Questão 7. Variando o controle de 0° a 360° , qual o valor mínimo do seno? E o valor máximo?

	Mínimo	Máximo	Intervalo de variação
SENO			$\text{---} \leq \text{sen}(\alpha) \leq \text{---}$

Questão 8. Variando o controle de 0° a 360° , qual o valor mínimo do cosseno? E o valor máximo?

	Mínimo	Máximo	Intervalo de variação
COSENSO			$\text{---} \leq \text{cos}(\alpha) \leq \text{---}$

Questão 9. (ESTUDO DO SINAL) Variando o controle de 0° a 360° , dê o sinal do seno e cosseno em cada quadrante, ou seja, diga se é **positivo** ou **negativo**.

	1° Q	2° Q	3° Q	4° Q
SENO				
COSENSO				

ROTEIRO DE ESTUDO 2 (RE2)

Atividade: N2

Data: _____

Duração: 80 minutos

Nomes:

Objetivos:

- Identificar os intervalos de crescimento e decrescimento das funções seno e cosseno para ângulos entre 0° a 360° .
- Demonstrar a relação trigonométrica fundamental.
- Perceber a periodicidade das funções seno e cosseno.
- Iniciar a construção do gráfico das funções seno e cosseno para os pontos $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, em seguida, conjecturar o comportamento dos gráficos no intervalo $[0, 4\pi]$.

Questão 1. Mova o controle e diga em qual quadrante o seno é crescente ou decrescente.

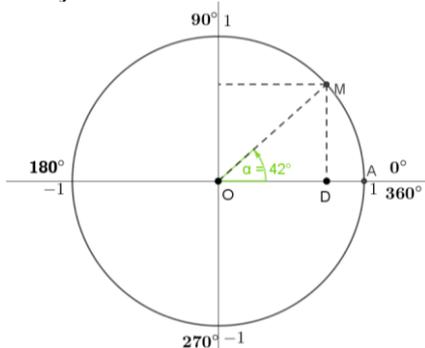
	1° Q	2° Q	3° Q	4° Q
SENO				
COSENSO				

Questão 2. Lembrando algumas igualdades entre grau e radiano.

GRAU	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
RADIANO						π		

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Questão 3. Observando as medidas dos lados do triângulo **retângulo** MOD, estabeleça uma relação entre o seno e cosseno.



Questão 4. Na questão 3 foi feita a análise no 1º quadrante. A relação encontrada também é válida para os demais quadrantes. Justifique.

Questão 5. Mova o controle e preencha a tabela a seguir.

	30°	390°	750°	1110°
SENO				
COSENO				

Questão 6.

A) O que você pode observar com os resultados do valor do **seno** para os ângulos indicados na questão 5?

B) Como são chamados esses ângulos?

Questão 7.

A) O que você pode observar com os resultados do valor do **coseno** para os ângulos indicados na questão 5?

B) Como são chamados esses ângulos?

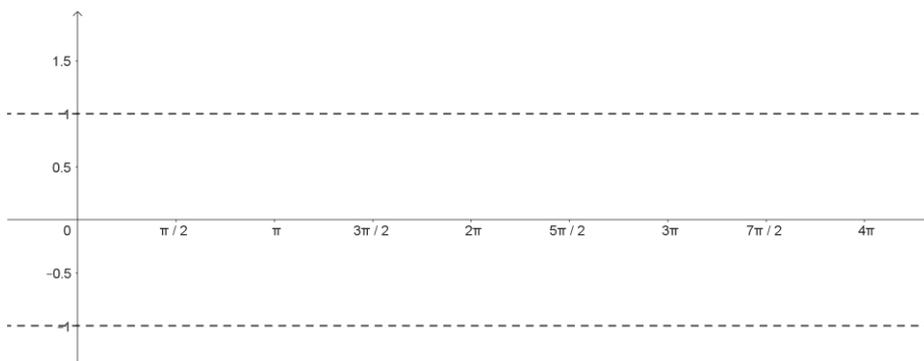
Questão 8. Mova o controle variando de 0° a 1080° e responda:

A) Os valores do seno e cosseno se repetem de quantos em quantos radianos?

B) Um fenômeno que se repete é chamado de quê?

Questão 9. Preencha as tabelas a seguir e marque os pontos no plano cartesiano.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
SENO							



Questão 10. Com base no que foi estudado até aqui, como fica o gráfico do seno de 0 a 4π ? (CONJECTURAR)

Questão 11. (TRAGA NA PRÓXIMA AULA) Faça o mesmo das questões 9 e 10 para o cosseno.

ROTEIRO DE ESTUDO 3 (RE3)

Atividade: N3

Data: _____

Duração: 80 minutos

Nomes:

Objetivos:

- Identificar a variação de comportamento das funções $f(x) = a + b\sin(cx + d)$ e $g(x) = a + b\cos(cx + d)$, a, b, c, d números reais com $b, c \neq 0$.

Comandos:

MUDAR A ESCALA DE CADA EIXO PARA UMA MELHOR VISUALIZAÇÃO:

coloque o cursor em cima de um eixo, mantenha pressionado **shift** e mova o touchpad para cima ou para baixo.

MOVER EIXO. Clique e segure em uma área em branco e arraste.

Questão 1.

- Coloque os seguintes valores: $b = 1, c = 1, d = 0$.
- Como fica a expressão simplificada das funções f e g ?

- Movendo o controle a, o que você pode observar sobre o comportamento das funções seno e cosseno?

- _____

Questão 2.

- Coloque os seguintes valores: $a = 0, c = 1, d = 0$.
- Como fica a expressão simplificada das funções f e g ?

- Movendo o controle b, o que você pode observar sobre o comportamento das funções seno e cosseno?



Questão 3.

- Coloque os seguintes valores: $a = 0, b = 1, d = 0$.
- Como fica a expressão simplificada das funções f e g ?

- Movendo o controle c , o que você pode observar sobre o comportamento das funções seno e cosseno?

Questão 4.

- Coloque os seguintes valores: $a = 0, b = 1, c = 1$
- Como fica a expressão simplificada das funções f e g ?

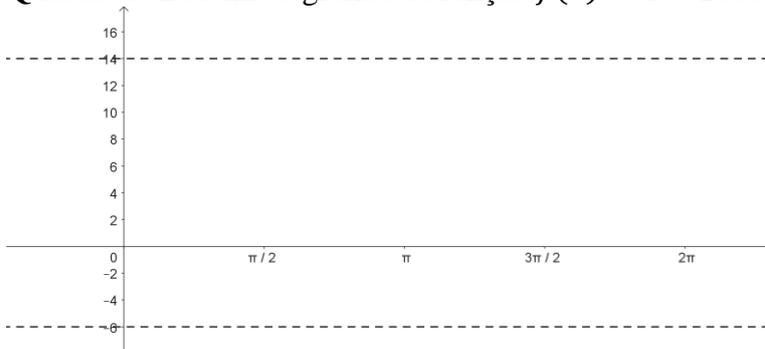
- Movendo o controle d , o que você pode observar sobre o comportamento das funções seno e cosseno?

- Preencha a tabela a seguir.

	$c = 1$	$c = 2$	$c = 4$	$c = 8$
Período	$T =$	$T =$	$T =$	$T =$

Tente estabelecer uma fórmula para o valor do período T em função do parâmetro c .

Questão 5. Desenhe o gráfico da função $f(x) = 4 + 10\text{sen}(2x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$.



- Qual o valor máximo e mínimo? _____
- Qual o valor do período? _____
- Faça os cálculos para encontrar os valores de máximo e mínimo e o período.

Questão 6.

- Faça os cálculos para encontrar os valores de máximo e mínimo e o período da função $f(x) = 20 - 6\text{cos}(4x)$.
- Depois confira no GeoGebra.

ROTEIRO DE ESTUDO 4 (RE4)

Atividade: N4

Data: _____

Duração: 40 minutos

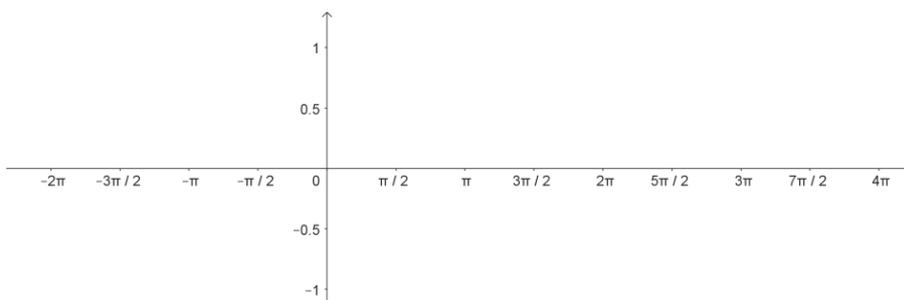
Nomes:



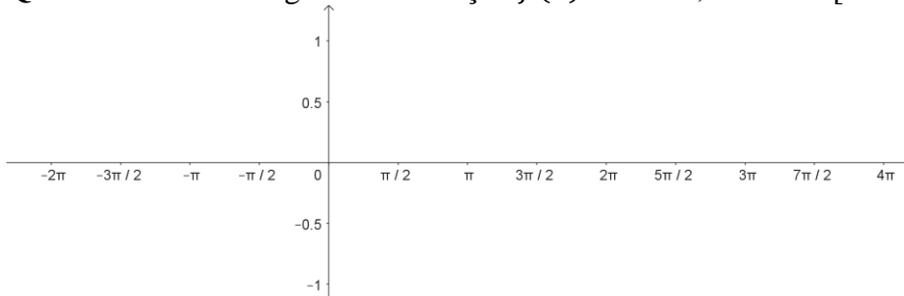
Objetivos:

- Construir o gráfico das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \text{cos}(x)$, com $x \in [-2\pi, 4\pi]$.
- Determinar o período e os valores de máximo e mínimo de funções do tipo $f(x) = a + b\text{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b\text{cos}(cx + d)$, a, b, c, d números reais com $b, c \neq 0$.

Questão 1. Esboce o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$, com $x \in [-2\pi, 4\pi]$.



Questão 2. Esboce o gráfico da função $f(x) = \text{cos } x$, com $x \in [-2\pi, 4\pi]$.



Questão 3. Rodas gigantes são atrações muito visitadas em parque de diversão, onde o movimento das cadeiras é periódico. Suponha que a altura de uma das cadeiras de uma roda gigante, em relação ao solo, é modelada pela função $h(t) = 12 + 4\text{sen}(2\pi t)$, onde t é o tempo em minutos e h em metros.

- Qual o período da roda gigante?
- Quais as alturas máxima e mínima atingidas?
- Qual a altura atingida por um dos ocupantes dessa cadeira em $t = 2 \text{ min}$?
- Confira no GeoGebra os seus resultados anteriores.

Questão 4.

- Faça os cálculos para encontrar os valores de máximo e mínimo e o período da função $f(x) = 30 + 12\text{cos}(2x)$.
- Depois confira no GeoGebra.

Ao final do quarto roteiro aplicou-se um questionário para que os estudantes pudessem avaliar as aulas com a utilização do GeoGebra. Seguem as seis perguntas propostas.

QUESTIONÁRIO DE FEEDBACK

Olá.



Esse espaço é para você dar sua opinião sobre o uso do GeoGebra no estudo das funções seno e cosseno desenvolvido nas últimas aulas de matemática do ano letivo de 2022 no Colégio Estadual Professor Nelson Barros.

1. Você sentiu dificuldades em usar o GeoGebra após as explicações do professor?
 não.
 um pouco.
 muita.
2. Através do GeoGebra foi possível fazer manipulações com os controles. Você considera que essas manipulações contribuíram para o entendimento de propriedades estudadas das funções seno e cosseno?
 não.
 sim.
3. Você considera que as aulas de matemática com o uso do GeoGebra contribuíram para a sua maior participação nas aulas?
 não.
 sim.
4. Qual tipo de aula você considera que leva o aluno a ter uma maior participação e entendimento?
 expositiva no quadro da sala de aula.
 com mediação do uso do GeoGebra.
 é indiferente as duas anteriores.
5. Você considera que as aulas de matemática deveriam, quando possível, continuar usando o GeoGebra?
 não.
 sim.
6. Dê sua opinião de como foram as aulas de matemática no estudo das funções seno e cosseno usando o GeoGebra.

REPOSTA LIVRE.

4. Resultados e discussões

A pesquisa conseguiu um alcance de 23 estudantes realizando efetivamente os estudos através dos quatro roteiros apresentados. Em vista de alcançar resposta à nossa pergunta inicial, se ‘O uso do GeoGebra pode ser um facilitador às aprendizagens de funções trigonométricas?’, partiu-se das *ideias iniciais* das funções seno e cosseno, cujas definições fazem contato direto com o CT. Uma vez tomada essa escolha, ficou claro que a construção do entendimento das definições e propriedades das funções seno e cosseno através do aspecto dinâmico do GeoGebra contribuíram na facilitação de um entendimento efetivo.

Com o RE1, os estudantes puderam entender de forma ativa as definições de seno e cosseno, respondendo de forma assertiva às perguntas desse roteiro. Observou-se que, diferente de uma explicação na lousa de uma sala de aula, onde para cada valor dessas funções tem-se uma representação estática, com o GeoGebra os aprendizes, ao mesmo tempo que compreendiam as definições, estabeleciam propriedades de valores máximo e mínimo, sinal e outras, dando um salto significativo nas aprendizagens, com um menor tempo e satisfação.

Questão 7. Variando o controle de 0° a 360° , qual o valor mínimo do seno? E o valor máximo?

	Mínimo	Máximo	Intervalo de variação
SENO	-1	1	$-1 \leq \text{sen}(\alpha) \leq 1$

Questão 8. Variando o controle de 0° a 360° , qual o valor mínimo do cosseno? E o valor máximo?

	Mínimo	Máximo	Intervalo de variação
COSENSO	-1	1	$-1 \leq \text{cos}(\alpha) \leq 1$

Questão 9. (ESTUDO DO SINAL) Variando o controle de 0° a 360° , dê o sinal do seno e cosseno em cada quadrante, ou seja, diga se é positivo ou negativo.

	1° Q	2° Q	3° Q	4° Q
SENO	Positivo	Positivo	Negativo	Negativo
COSENSO	Positivo	Negativo	Negativo	Positivo

FIGURA 5. Recorte de uma das respostas do RE1.

Na aplicação do RE2, os estudantes tiveram um claro entendimento da propriedade de periodicidade das funções trigonométricas em estudo. Mais uma vez, a natureza dinâmica do applet criado, oportunizou uma visualização rápida do comportamento das funções e alguns de seus valores. Algumas dificuldades foram evidenciadas por conta de falta de base matemática na generalização da Relação Trigonométrica Fundamental para todos os quadrantes e na plotagem de pontos no CT; por conseguinte, no traçado gráfico. Ficou perceptível que alguns pensaram que uma sequência do tipo $(0, -0,2, -0,5, -1)$ é crescente, induzidos pelo crescimento dos valores em módulo. Já quanto a plotagem de pontos no plano cartesiano, alguns apresentaram dificuldade na marcação de pontos, o que levou a não traçar o gráfico. Sendo assim, é indicado trabalhar antes com esses conceitos prévios.

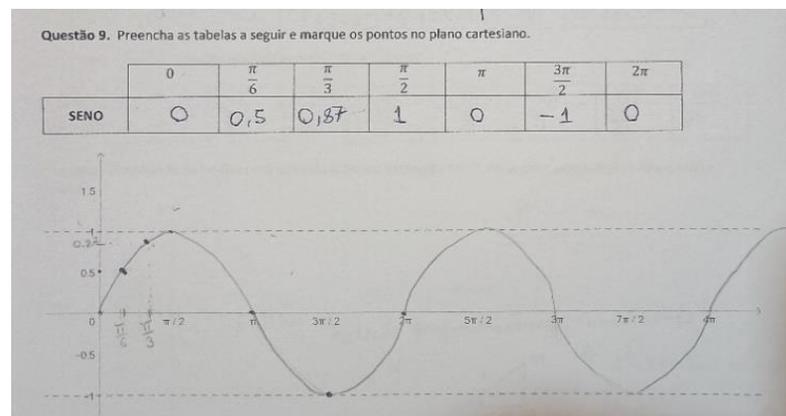


FIGURA 6. Recorte de uma das respostas do RE2.

O RE3 foi uma atividade bastante proveitosa, pois os estudantes ao utilizarem os controles pondo a variar os parâmetros a, b, c e d , perceberam, na ordem, o deslocamento vertical do gráfico, a variação da amplitude, a variação do período e o deslocamento horizontal do gráfico. Dada a característica dinâmica do applet, houve uma contribuição significativa para entender tais comportamentos, o que tenderia a dar mais trabalho na compreensão para traçados gráficos estáticos. O lançamento dos dados na tabela da questão 4 utilizando o applet permitiu que os estudantes entendessem a generalização para fórmula do período, a qual é $T = \frac{2\pi}{|c|}$. Aqui, novamente se destaca positivamente a utilização da TDIC, pois os traçados de tais funções de maneira manual não sendo simples, tendem a levar a uma desmotivação na aprendizagem. Por outro lado, a visualização rápida pelo GeoGebra permite focar na propriedade que ora se deseja construir, o período das funções.

A experiência de ter partido desde o início da definição das funções seno e cosseno utilizando o GeoGebra contribuiu para que no RE3 os estudantes estivessem preparados para inferirem sobre as mudanças de comportamento na variação dos quatro parâmetros, pois eles construíram ativamente os conhecimentos de período, amplitude, posição gráfica e pontos das funções.

Questão 1.

- Coloque os seguintes valores: $b = 1, c = 1, d = 0$.
- Como fica a expressão simplificada das funções f e g ? $f(x) = a + \text{sen } x, g(x) = a + \text{cos } x$
- Movendo o controle a , o que você pode observar sobre o comportamento das funções seno e cosseno?
- Deslocando para cima ou pra baixo.

Questão 2.

- Coloque os seguintes valores: $a = 0, c = 1, d = 0$.
- Como fica a expressão simplificada das funções f e g ? $f(x) = b \text{sen } x, g(x) = b \text{cos } x$
- Movendo o controle b , o que você pode observar sobre o comportamento das funções seno e cosseno?
- a amplitude está sendo alterada.

Questão 3.

- Coloque os seguintes valores: $a = 0, b = 1, d = 0$.
- Como fica a expressão simplificada das funções f e g ? $f(x) = \text{sen}(cx), g(x) = \text{cos}(cx)$
- Movendo o controle c , o que você pode observar sobre o comportamento das funções seno e cosseno?
- o valor de c altera o período da função

Questão 4.

- Coloque os seguintes valores: $a = 0, b = 1, c = 1$
- Como fica a expressão simplificada das funções f e g ? $f(x) = \text{sen}(x+d), g(x) = \text{cos}(x+d)$
- Movendo o controle d , o que você pode observar sobre o comportamento das funções seno e cosseno?
- Deslocamento horizontal (esquerda para direita).
- Preencha a tabela a seguir.

π	$c = 1$	$c = 2$	$c = 4$	$c = 8$
Período	$T = 2\pi$	$T = \pi$	$T = \frac{\pi}{2}$	$T = \frac{\pi}{4}$

- Tente estabelecer uma fórmula para o valor do período T em função do parâmetro c .
- $T = \frac{2\pi}{|c|}$

FIGURA 7. Recorte de uma das respostas do RE3.

Ao chegarmos no RE4, na resolução do problema prático da ‘roda gigante’, todo o desenvolvimento pedagógico entre professor x estudante, estudante x estudante e estudante x TDIC contribuíram para o sucesso nas respostas. E mais do que acertar nos cálculos algébricos, percebeu-se um entendimento de conceitos. Além de uma intensa satisfação, ao confrontarem os resultados alcançados com os dados nos GeoGebra como estava sugerido na questão 3d), e

assim, tendo a possibilidade de visualização por diferentes representações como aponta Duval (2012).

Questão 3. Rodas gigantes são atrações muito visitadas em parque de diversão, onde o movimento das cadeiras é periódico. Suponha que a altura de uma das cadeiras de uma roda gigante, em relação ao solo, é modelada pela função $h(t) = 12 + 4\text{sen}(\frac{2\pi}{c}t)$, onde t é o tempo em minutos e h em metros.

a) Qual o período da roda gigante?

$$T = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{12\pi} = 1 \text{ min}$$

b) Quais as alturas máxima e mínima atingida?

$$12 + 4 \cdot 1 = 12 + 4 = 16 \text{ m} - \text{máximo}$$

$$12 + 4 \cdot (-1) = 12 - 4 = 8 \text{ m} - \text{mínimo}$$

c) Qual a altura atingida por um dos ocupantes dessa cadeira em $t = 2 \text{ min}$?

$$h(2) = 12 + 4\text{sen}(2\pi \cdot 2) \rightarrow t = 2$$

$$= 12 + 4\text{sen}(4\pi)$$

$$= 12 + 4 \cdot 0$$

$$= 12$$

d) Confira no GeoGebra os seus resultados anteriores.

FIGURA 8. Recorte de uma das respostas do RE4.

Em última análise, o questionário de feedback teve 20 respondentes. De modo geral, as respostas mostraram uma ótima aceitação do uso do GeoGebra na compreensão dos conceitos das funções trigonométricas, o que está alinhado com as respostas dos roteiros. Quanto a questão 1, existência de dificuldades no uso do GeoGebra, 14 (70%) relataram ‘um pouco’, 6(30%), ‘não’. Tal resultado traz à tona que no ensino mediado por TDIC, além de se pensar na estratégia pedagógica do uso, é preciso que os usuários tenham certo domínio com ferramenta em si - o que proporciona leveza e fluidez no seu uso para, de fato, alcançar os objetivos propostos. No caso em tela, a turma teve contatos anteriores com o GeoGebra. Claro que, quanto mais usa-se, a tendência é ter um maior domínio da ferramenta. Percebe-se pelas respostas dos roteiros, da percepção docente e das demais repostas desse questionário, que essa pouca dificuldade de uso, não representou que aprendizagens não pudessem ser efetivadas, e sim, mais uma questão de saber onde ‘clique’, o que ia sendo sanado com a orientação do docente e entre os estudantes.

Na questão 2, possibilidades de manipulações no GeoGebra, 100% opinaram pela contribuição de tais ações para o entendimento dos assuntos. Com isso, nota-se que essa característica dinâmica do software é um ponto indicado para sua exploração e de grande benefício pedagógico.

Sobre o aumento da participação nas aulas, questão 3, 19(95%) estudantes disseram que ‘sim’, o que é um ponto de grande atenção pedagógica, pois nas aulas de matemática estudantes tendem a não focar nas explicações no quadro. O uso da tecnologia digital associado ao roteiro de estudo com perguntas levou a uma participação bem expressiva.

Buscando comparar o entendimento e a participação do trabalho desenvolvido com uma aula expositiva no quadro de sala de aula, questão 4, 14(73,7%) preferiram ‘com mediação do GeoGebra’, 1(5,3%) ‘expositiva’, e 4(21,1%) disseram que é ‘indiferente’. Percebe-se que a



preferência pela utilização do GeoGebra abrangeu mais de 70% dos estudantes, revelando uma boa aceitação. Apesar de 4 estudantes ter dito ser indiferente, quando comparada as respostas na questão 2, vemos que 100% revelaram uma melhora no seu aprendizado.

A questão 5 trouxe à reflexão se as aulas de matemática deveriam, quando possível, continuar usando o GeoGebra: 19(95%) disseram que ‘sim’, comprovando quase uma totalidade pela continuidade do uso da tecnologia digital em apreço.

Por fim, na questão 6 é dada uma oportunidade de resposta escrita para opinião do como foram as aulas usando o GeoGebra. As respostas foram na direção de unanimidade pela ótima contribuição do GeoGebra como meio facilitador nas aprendizagens de funções trigonométricas. As falas foram no sentido de “bem interativas”, “ficou mais interessante”, “facilitou o nosso aprendizado”, “foram ótimas as aulas”, “quero que no que vem continue”, “comecei a me interessar mais no assunto”, “estudando pelo geogebra ficou muito mais fácil”, “foram positivas”, “a interação com outros alunos também foi maior”. Alguns relataram que no início tiveram dificuldades de manuseio do software, mas com o tempo iam sendo sanadas.

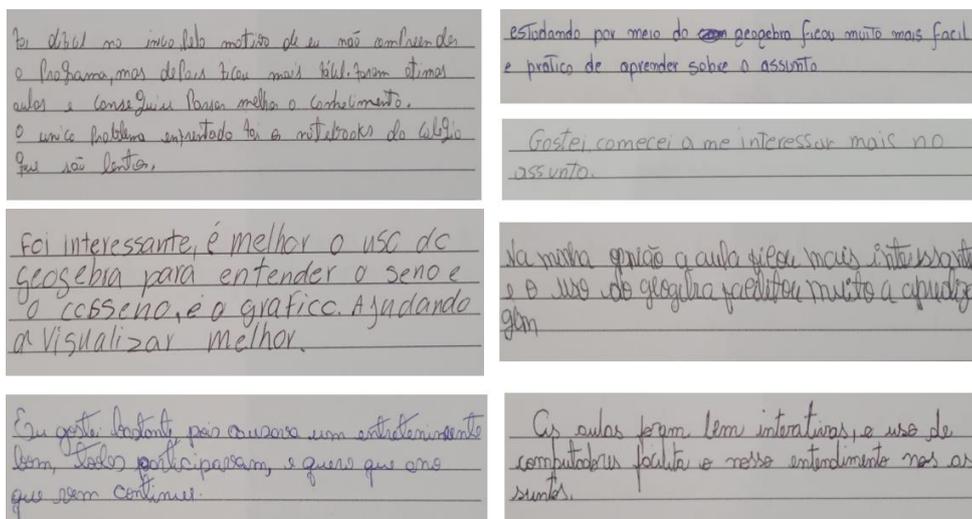


FIGURA 9. Recortes de algumas respostas do questionário de feedback.

Considerações finais

O uso do GeoGebra apresentado nesse trabalho teve resultados positivos e satisfatórios. Melhorou significativamente a participação, o engajamento e o protagonismo dos estudantes. Os aprendizados do conceito das funções seno e cosseno, suas variações e propriedades foram facilitados a partir do uso dos applets criados, associados à mediação metodológica estabelecida pelo docente da turma, não ficando no mero uso da tecnologia digital como apontado por Basniak, Silva e Gaulovski (2017). Cada comando requerido do usuário frente a tecnologia precisa ser pensado com um fim pedagógico.

O estudo das funções $f(x) = a + b \sin(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cos(cx + d)$, como apresentadas, ficou facilitado movimentando os controles no applet 3 e pelas construções



anteriores desde a compreensão das definições das funções seno e cosseno, respondendo nossa pergunta problema. O que por outro lado, seria trabalhoso através de explicação estática no quadro da sala de aula. Dessa forma, ratificamos como é surpreendente o potencial que o GeoGebra apresenta de ser um software de natureza dinâmica para o ensino-aprendizagem de matemática, abrindo portas para outras pesquisas nos mais variados conteúdos matemáticos, de forma alinhada com habilidades propostas da BNCC e alguns autores, conforme apresentamos anteriormente, como Pereira (2015) e Cardoso (2019).

Como sugestão para uso desse material indica-se um trabalho de maior familiarização dos estudantes com o software antes de iniciar os estudos, de modo que sejam minimizados alguns entraves iniciais encontrados por conta da não habilidade de seu manuseio. Também aplicar em duas horas/aula todos os roteiros, pois fica mais livre o tempo, que também é gasto na instalação e conexão dos equipamentos.

Fica o convite para outros docentes usarem o material aqui exposto, considerando possíveis adaptações nos roteiros e/ou nos applets, se assim desejarem. Usar, por exemplo, em conexão com modelagem matemática como indicado por Santos e Effen (2018). E por que não dizer: experimentar o uso do GeoGebra para o ensino de outros objetos de aprendizagem matemática através de estratégias metodológicas de ensino-aprendizagem previamente estabelecidas, considerando que o sucesso dos estudantes nas aprendizagens será sempre uma enorme satisfação para o docente.

Referências

- BASNIAK, M. I.; SILVA, S. C. R. da; GAULOVSKI, J. M. **Tecnologias digitais e ensino da matemática no Brasil: uma revisão da literatura de 2010-2017**. Revista Tecnologias na Educação, Minas Gerais, Ano 9-Número/vol23, dez. 2017. Disponível em: <https://tecedu.pro.br/wp-content/uploads/2017/12/ARE27-vol.23-Dezembro-2017.pdf>. Acesso em: 10 set. 2023.
- BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.
- BORBA, M. de C.; SILVA, R. S. R da.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Ensino Médio. Brasília, 2018.
- CARDOSO, T. A. **A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA**. Ideias e Inovação - Lato Sensu, v. 5, n. 1, p. 45-52, 2019. Disponível em: <https://periodicosgrupotiradentes.emnuvens.com.br/ideiaseinovacao/article/view/7087>. Acesso em: 26 out. 2024.



CARVALHO, J. N. P. de. **FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E APLICAÇÕES: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO USANDO O GEOGEBRA.** Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal do Semi-Árido. Mossoró -RN, 2020.

DIONIZIO, F. A.Q.; BRANDT, C. F. **Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria.** In: X Congresso Nacional de Educação - EDUCERE, 2011, Curitiba-PR. Anais do ... Congresso Nacional de Educação. Curitiba-PR: Champagnat, 2011. p. 4408-4421.

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Trad. de Méricles Thadeu Moretti. Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 10 out. 2024.

FELCHER, C. D.; FOLMER, V. O. **Uso de Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática.** Ijuí: Editora Unijuí, 2021.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido.** 17ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2017.

KENSKI, V. M. **EDUCAÇÃO E TECNOLOGIAS: O NOVO RITMO DA INFORMAÇÃO.** Campinas: Papirus, 2013.

LIMA, M. F. de; ARAÚJO, J. F. S. de. **A utilização das tecnologias de informação e comunicação como recurso didático-pedagógico no processo de ensino e aprendizagem.** *Revista Educação Pública*, v. 21, nº 23, 22 de junho de 2021. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/23/a-utilizacao-das-tecnologias-de-informacao-e-comunicacao-como-recurso-didatico-pedagogico-no-processo-de-ensino-aprendizagem> . Acesso em: 18 de out. 2024.

LOPES, M. M. **Construção e Aplicação de uma Sequência Didática para o Ensino e Aprendizagem de Trigonometria Usando o Software GeoGebra.** Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal-RN, 2010.

OLIVEIRA, A. T. E. de. **Ensino de funções trigonométricas com modelagem matemática.** Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal do Mato Grosso. Cuiabá -MT, 2019.

PEREIRA, E. **A UTILIZAÇÃO DE APPLETS NO GEOGEBRA PARA A APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal de Alagoas. Maceió -AL, 2015.

PETLA, J. R.; ROLKOUSKI, E. **Geogebra – Possibilidades para o ensino de Matemática.** PDE/SEED: Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1419-8.pdf> . Acesso em: 25 de out. 2024.



SANTOS, G. V. H dos; EFFEN, F. **Fenômenos Cíclicos - Modelagem com funções trigonométricas**. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal do Paraná. Curitiba- PR, 2018.

SCHUHMACHER, V. R. N.; FILHO, J. de P. A. SCHUHMACHER, E. **As barreiras da prática docente no uso das tecnologias de informação e comunicação**. *Ciência & Educação* (Bauru), v. 23, n. 3, p. 563–576, jul. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1516-731320170030002> . Acesso em: 18 de out. 2024.