Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia da Bahia - Campus Valença
Licenciatura em Matemática

Sávio Ribeiro Gomes Negrão

Teoria dos Números: Uma Análise Sobre Problemas em Aberto

Valença-BA
2023

Sávio Ribeiro Gomes Negrão

Teoria dos Números: Uma Análise Sobre Problemas em Aberto

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - *Campus* Valença como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Diego Coutinho Vieira Santiago

Valença-BA
2023

N385t Negrão, Sávio Ribeiro Gomes
Teoria dos números: uma análise sobre problemas em aberto.-Valença- BA: IFBA, 2023.
65f.;il.

Orientador: Prof. Me. Diego Coutinho Vieira Santiago

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) Licenciatura em Matemática- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – Campus Valença, 2023.
1.Teoria dos números- Matemática. 2. Problemas em aberto 3. Conjecturas. 4. Números primos I. Santiago, Diego Coutinho Vieira. II. Título.

CDD: 512.7

Catalogação na fonte: Cátia Almeida de Andrade. CRB1403-5.
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
- *Campus Valença*

"A Matemática, vista corretamente,
possui não apenas verdade,
mas também suprema beleza."

Bertrand Russell (1872 - 1970)

In memoriam:
Amando Tanan,
meu eterno avô.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por me permitir chegar até aqui; sem Ele, nada seria possível. Agradeço imensamente a minha incrível mãe, Salete Ribeiro Gomes Negrão e ao meu grandioso pai, Sílvio Pereira Negrão, por terem me ensinado a trilhar o caminho do bem, do respeito, da honestidade e principalmente dos estudos; por sempre me apoiar e me guiar na estrada da vida. Aos meus avós paternos, Zelí Dias e Antônio Negrão (*in memoriam*), pessoas que fizeram parte da minha criação.

Ao meu orientador e professor, Diego Coutinho, pela belíssima orientação e dedicação em compartilhar seus conhecimentos, além de orientador e amigo, é um grande conselheiro. Obrigado pelo incentivo para utilizar o LaTeX, ferramenta que deixou o trabalho extremamente organizado, a altura da beleza da Matemática, exatamente como deve ser. Obrigado por toda ajuda e orientação.

Aos membros da minha banca, Diogo Dórea e Renata Vianna, por contribuirem para a excelência desse trabalho. Aos professores que tive durante o período de graduação, professores os quais me espelho, que são exemplos para mim, como Jamille, Ruth, Márcia Rebeca, Eliete, Patrícia Argôlo, Renata, Roque, Marcelo, Diego, Diogo, entre outros professores e professoras que auxiliaram imensamente para minha formação.

Aos meus amigos pelos incansáveis estudos frequentes, em singular, minha prima, Daniele Negrão, que além de uma grande amiga, foi uma parceira de estudos durante todo o curso. Um agradecimento sublime para Vânia Ramos, pela parceria e principalmente pela paciência e compreensão nos momentos de aflições na longa jornada do curso.

Por fim, trago meu agradecimento especial para minha avó, Ruth Maria e em memória ao meu avô, Amando Tanan, por serem pessoas que sempre acreditaram em mim, sempre acreditaram que eu seria capaz. Obrigado por tanto carinho!

Resumo

Este trabalho de monografia visa apresentar uma análise sobre as conjecturas e problemas em aberto dentro do estudo da Teoria dos Números. Abordaremos desde conceitos básicos para o entendimento desta análise, como o conceito de números primos, sua infinitude, suas aplicações e seu padrão de formação, sendo este, o primeiro problema elementar em aberto analisado neste trabalho. Além disso, veremos também outros problemas em aberto envolvendo os números primos, como os famosos Primos de Mersenne e os primos gêmeos, mostrando a importância do estudo sobre a teoria dos números primos. No campo das conjecturas, começaremos estudando uma das mais belas conjecturas apresentadas: A Conjectura de Goldbach. Tal conjectura possui um enunciado relativamente simples de ser entendido e uma importância extremamente relevante para a Teoria dos Números. Apresentaremos também a Conjectura de Legendre, que retoma as aplicações dos números primos, mostrando novamente o quão misteriosos são esses números e a sua extrema relevância para a Matemática. Veremos também a Conjectura de Collatz, um importante enunciado para a teoria dos números primos e repleto de aplicações, principalmente no campo da Computação. Contemplaremos também outros problemas em aberto, nos quais veremos os chamados números perfeitos e números amigos. O estudo destes números é de extrema importância para a Teoria dos Números, pois retoma conceitos básicos como divisibilidade e congruência modular.

Palavras-chave: Teoria dos Números. Problemas em Aberto. Conjecturas.

Abstract

This monograph work aims to present an analysis of the conjectures and open problems in the study of Number Theory. We will cover basic concepts to understand this analysis, such as the concept of prime numbers, its infinity, its applications and its formation pattern, which is the first elementary open problem analyzed in this work. Moreover, we will also see other open problems involving prime numbers, such as the famous Mersenne Primes and twin primes, showing the importance of the study of prime number theory. In the field of conjectures, we will begin by studying one of the most beautiful conjectures presented: The Goldbach's Conjecture. This conjecture has a relatively simple statement to understand and an extremely relevant importance for Number Theory. We will also present the Legendre Conjecture, which resumes the applications of prime numbers, showing again how mysterious these numbers are and their extreme importance for Mathematics. We will also see the Collatz Conjecture, an important statement for prime number theory and full of applications, especially in the field of Computing. We will also contemplate other open problems, in which we will see the so-called perfect numbers and friendly numbers. The study of these numbers is extremely important for Number Theory, since it recovers basic concepts such as divisibility and modular congruence.

Keywords: Number Theory. Open Problems. Conjectures.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Ao longo da história, muitos matemáticos se debruçaram para resolver problemas que até o momento não possuíam solução; geralmente são vários anos de dedicação para solucionar um problema que, na maioria das vezes, o enunciado chega a ser simples, porém, a sua complexidade está na tentativa de demonstração que tal afirmação é verdadeira (ou falsa). Os problemas em aberto na Matemática são questões cuja solução é desconhecida ou não totalmente compreendida pelos matemáticos. Esses problemas podem surgir de diversas áreas da Matemática, como a Teoria dos Números, Geometria, Topologia, Análise, entre outras. Muitas vezes, tais problemas são formulados em termos de conjecturas, que são afirmações que se acredita serem verdadeiras, mas que ainda não foram demonstradas formalmente. Os matemáticos trabalham para provar ou refutar essas conjecturas, e a resolução desses problemas pode levar a novas descobertas e avanços em diversas áreas da Matemática.

Os problemas em aberto são importantes porque eles desafiam os matemáticos a pensarem criativamente e a explorarem novas áreas da Matemática. Além disso, muitos desses problemas são fundamentais para o desenvolvimento de novas teorias e aplicações práticas em várias áreas do conhecimento, como Física, Engenharia, Ciência da Computação e Criptografia. Muitos dos problemas em aberto na Matemática são extremamente difíceis de resolver, e alguns deles têm sido objeto de estudo por décadas, senão séculos. No entanto, os matemáticos continuam a trabalhar nesses problemas, na esperança de que novas técnicas e ideias possam levar a uma solução em algum momento no futuro.

O Teorema de Fermat (também conhecido como “O Último Teorema de Fermat”), foi um problema algébrico proposto em 1637 pelo matemático francês Pierre de Fermat $(1601 - 1665)$, onde enunciava que não existe solução para a equação $x^n + y^n = z^n$, onde n é um inteiro maior do que 2 e (x, y, z) são inteiros positivos. Tal enunciado permaneceu sem solução por mais de 350 anos desde sua publicação, enquanto diversos matemáticos tentaram solucioná-lo. Uma das tentativas de sua demonstração foi realizada em 1993, no famoso seminário anual de Matemática, realizado na Universidade de Cambridge. O matemático britânico Andrew Wiles $(1953-)$ passou 7 anos se dedicando totalmente em um único problema, porém, a sua primeira demonstração apresentava erros. Wiles se dedicou por mais 1 ano, e por fim, apresentou a demonstração completa em 1994. Outro exemplo interessante é a Conjectura de Poincaré, proposta pelo matemático francês Henri Poincaré $(1854-1912)$ no ano de 1900, e é um dos problemas matemáticos considerados mais difíceis da história. O problema ficou por séculos sem solução, até que foi demonstrada em 2003 pelo russo Grigori Perelman $(1966-)$, um matemático que recusou o prêmio de 1 milhão de dólares e todas as honrarias acadêmicas pelo seu feito, pois afirmava que seu único interesse era "fazer matemática", e não receber honrarias por isso. Outro problema que desafia os matemáticos é a Hipótese de Riemann, proposta pelo matemático alemão Bernhard Riemann $(1826-1866)$ em 1859, um problema sem solução até os dias atuais, e que, diferente dos outros, seu enunciado é tão complexo quanto suas tentativas de demonstração. Tal problema, se demonstrado verdadeiro, abrirá portas para um novo entendimento da Matemática e suas aplicações.

A Teoria dos Números é um campo da Matemática Pura que estuda as propriedades dos números em geral (em particular dos números inteiros). É nessa área da Matemática que se encontra grande parte dos problemas em aberto, onde na maioria das vezes, tais problemas estão intimamente ligados aos números primos. De modo simples, números primos são números que possuem apenas dois divisores positivos. Como 1 é divisor de todo número inteiro e o próprio número é divisor dele mesmo, então dizemos que um número é primo quando possui apenas dois divisores positivos: 1 e o próprio número. Como exemplo, temos que 5 é primo, pois os únicos divisores positivos de 5 são 1 e o próprio 5. Importante citar que o conjunto dos números primos é infinito, tal demonstração será abordada no segundo capítulo deste trabalho. Note que o conceito de número primo é simples, porém, estes números possuem um enigma interessante: a regularidade na qual esses números aparecem. Se analisarmos, por exemplo, os números pares e ímpares, é fácil encontrar uma regularidade nesses números, sendo possível até determinar uma fórmula matemática que resultará apenas em tais números. Porém, em relação aos números primos, essa regularidade não é evidente. Sendo assim, tem-se os seguintes problemas: existe um padrão ou regularidade para os números primos? Há alguma fórmula que expresse apenas esses números? Essas e outras questões serão abordadas mais especificamente no segundo capítulo e ao longo deste trabalho.

Ainda no capítulo sobre os números primos, iremos discutir sobre os números da forma $M_p = 2^p - 1$ (com p primo), conhecidos como Primos de Mersenne. Marin Mersenne (1588 - 1648), matemático francês, percebeu que para alguns valores de p primo, M_p também seria primo. Por exemplo, para $p = 3$, teríamos:

$$\begin{aligned} M_3 &= 2^3 - 1 \\ M_3 &= 8 - 1 \\ M_3 &= 7. \end{aligned}$$

Um outro exemplo a se analisar é o número 31, que também é um número primo considerado Primo de Mersenne, pois:

$$\begin{aligned} M_5 &= 2^5 - 1 \\ M_5 &= 32 - 1 \\ M_5 &= 31. \end{aligned}$$

Essa descoberta foi muito significativa para a área da Teoria do Números, principalmente no que tange aos números primos, pois, os maiores números primos encontrados atualmente são no formato dos Primos de Mersenne. Mas, fica o questionamento: sabemos que o conjunto dos números primos é infinito, mas será que o conjunto dos Primos de Mersenne também é? Note que saber que o conjunto dos números primos é infinito não garante que o conjunto dos Primos de Mersenne também seja.

Outro estudo curioso para se analisar dentro dos números primos são os chamados "primos gêmeos". Tais números são pares escritos da seguinte forma: $(p, p+2)$, onde p e $p+2$ são primos. Por exemplo, temos $(3, 5), (5, 7), (11, 13)$, entre outros. Note que cada par é formado por números primos e a diferença entre eles resulta em 2. Atualmente, existem pares muito grandes de números primos gêmeos, os quais veremos mais detalhadamente no capítulo sobre os números primos. A grande questão em relação ao conjunto dos primos gêmeos é sobre sua infinitude, ou seja, existem infinitos pares de primos gêmeos? Note que saber que o conjunto dos números primos é infinito não garante que o conjunto dos pares de primos gêmeos também é, tal afirmação precisa ser analisada de forma independente e com cautela.

No Capítulo 3, iremos apresentar e discutir três conjecturas dentro da Teoria dos Números: Conjectura de Goldbach, Conjectura de Legendre e Conjectura de Collatz. A conjectura de Goldbach foi enunciada por um matemático prussiano nascido em Königsberg (hoje pertencente à Rússia), chamado Christian Goldbach (1690 - 1764). Tal conjectura diz que todo número par maior que dois pode ser escrito como a soma de dois números primos. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 4 &= 2 + 2 \\ 8 &= 3 + 5. \end{aligned}$$

Observe que 2, 3 e 5 são números primos.

A Conjectura de Legendre, enunciada pelo matemático francês Adrien-Marie Legendre (1751 - 1833), afirma que existe pelo menos um número primo p entre n^2 e $(n+1)^2$, para qualquer n inteiro positivo, ou seja, $n^2 < p < (n+1)^2$. Por exemplo, para n igual a 1, temos

$$\begin{aligned} 1^2 < &\ p < (1+1)^2 \\ 1 < &\ p < 2^2 \\ 1 < &\ p < 4. \end{aligned}$$

Note que $p = 2$ e $p = 3$ satisfazem a condição $1 < p < 4$, já que 2 e 3 são números primos.

Já a Conjectura de Collatz, enunciada pelo matemático alemão Lothar Collatz (1910 - 1990), não faz uso dos números primos, porém, apresenta uma característica bem interessante: a conjectura segue um determinado algoritmo e afirma que, para qualquer número inteiro positivo inicial n, se n for par, divida-o por 2, caso contrário, multiplique-o por 3 e some 1. Repetindo esse processo para os próximos números gerados, o resultado final irá convergir para 1. Então, a conjectura afirma que, independentemente do valor inicial de n, a sequência resultante sempre chegará eventualmente ao número 1. Apesar de muitos matemáticos terem estudado essa conjectura e encontrado evidências empíricas que a suportam, ela ainda não foi provada nem refutada. Por isso, a Conjectura de Collatz é considerada um dos maiores mistérios da Matemática contemporânea dentro da Teoria dos Números. Por exemplo, escolhendo o número ímpar 3 para iniciar o algoritmo, temos os seguintes passos (chamaremos de iterações):

1ª Iteração

$$3 \cdot 3 + 1 = 10$$

2ª Iteração

$$\frac{10}{2} = 5$$

3ª Iteração

$$5 \cdot 3 + 1 = 16$$

4ª Iteração

$$\frac{16}{2} = 8$$

5ª Iteração

$$\frac{8}{2} = 4$$

6ª Iteração

$$\frac{4}{2} = 2$$

7ª Iteração

$$\frac{2}{2} = 1$$

Perceba que o resultado convergiu para 1, como prevê a conjectura. Porém, até o momento nada foi provado ou refutado, o que torna esta conjectura, no mínimo, interessante de se analisar.

Abordaremos também problemas em aberto que envolvem a ideia de divisibilidade, parte da Matemática extremamente importante para a Teoria dos Números. Tais problemas estão ligados aos números perfeitos e aos números amigos. Temos que, de modo resumido, um número inteiro positivo é considerado perfeito se ele for igual à soma de todos os seus

divisores próprios. Como exemplo, veja o número 6, este tem como divisores: $1, 2, 3$ e 6. Se somarmos todos os divisores de 6 menores que ele, obteremos o próprio número 6, ou seja: $1+2+3 = 6$. Essa característica dos números perfeitos foi pensada desde a época de Euclides de Alexandria (aproximadamente 323 a.C. - 283 a.C.) e intriga os matemáticos até hoje. A grande questão é: será que existem infinitos números perfeitos? Tal problema ainda está sem solução.
Já nos números amigos, o conceito é semelhante, porém, dois números inteiros positivos a, b são considerados números amigos se a soma dos divisores de a (exceto o próprio a) for igual a b, e a soma dos divisores de b (exceto o próprio b) resultar em a. Como exemplo, temos o par dos menores números amigos conhecidos: $(220, 284)$. Note que os divisores de 220 (exceto o próprio 220) são: $1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110$, onde a soma destes números resulta em 284. O mesmo acontece com o 284, seus divisores (com exceção do próprio 284) são: $1, 2, 4, 71, 142$, onde a soma destes divisores resulta em 220. Por essa condição específica, o par $(220, 284)$ é considerado um par de números amigos. Assim como os números perfeitos, aqui também há a grande questão: será que existem infinitos pares de números amigos?

Para abordar tais assuntos de forma aprofundada, temos como metodologia de pesquisa a revisão de literatura, que possibilitou investigar, ampliar, sistematizar e ordenar a estrutura deste trabalho.

> Revisão da literatura é o processo de busca, análise e descrição de um corpo do conhecimento em busca de resposta a uma pergunta específica. Literatura cobre todo o material relevante que é escrito sobre um tema: livros, artigos de periódicos, artigos de jornais, registros históricos, relatórios governamentais, teses e dissertações e outros tipos. (MATTOS, 2015, p. 2)

Trazemos também a importância da organização da apresentação dos dados, seguindo uma ordem lógica, pois dessa forma, há uma melhor compreensão do que está sendo apresentado. Traz-se assim, uma produção concisa das informações levantadas durante esta pesquisa. Dessa forma, segundo Mattos (2015), nesse tipo de produção, o material coletado pelo levantamento bibliográfico é organizado por procedência, ou seja, fontes científicas e fontes de divulgação de ideias, e, a partir da análise, permite ao pesquisador a elaboração de ensaios que favorecem a contextualização, problematização e uma primeira validação do quadro teórico a ser utilizado na investigação empreendida.

Capítulo 2

Problemas em aberto envolvendo números primos

Neste capítulo trataremos de conceitos sobre a definição dos números primos, sua infinitude, a incessante procura por números primos cada vez maiores e algumas das principais aplicações. Além disso, abordaremos também problemas em aberto como os Primos de Mersenne e os Primos Gêmeos. Utilizaremos como referência a obra de Santos (2009), com a qual iremos enunciar e demonstrar o Teorema Fundamental da Aritmética e o conceito de divisibilidade.

2.1 Divisibilidade

Definição 2.1. *Se a e b são inteiros, dizemos que a divide b, denotando por $a \mid b$, se existir um inteiro k tal que $b = a \cdot k$. Se a não divide b, escrevemos $a \nmid b$. Se temos que $a \mid b$, podemos dizer ainda que, b é divisível por a, ou que a é divisor de b.*

Como exemplo, temos que $5 \mid 10$, pois existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $10 = 5 \cdot k$, neste caso, $k = 2$. Por outro lado, temos que $7 \nmid 10$, pois não existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $10 = 7 \cdot k$. Esses exemplos com essa notação nos ajudará a entender a continuação desse trabalho.

2.2 Números Primos

Definição 2.2. *Um número inteiro p ($p > 1$), é denominado primo quando possui apenas dois divisores inteiros positivos, p e 1.*

Teorema 2.1. *(Teorema Fundamental da Aritmética). Todo número inteiro n maior do que 1 pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos.*

Demonstração:

Se n é primo, não há o que ser demonstrado. Supondo agora que n seja composto, temos p_1 ($p_1 > 1$), como o menor dos divisores positivos de n. Podemos afirmar que p_1 é primo, pois, caso contrário, existiria p, ($1 < p < p_1$), com $p \mid n$, contradizendo a escolha de p_1. Temos então que $n = p_1 \cdot n_1$.
Se n_1 for primo, nossa demonstração está completa. Caso contrário, tomamos p_2 como o menor fator de n_1. Pelo argumento anterior, p_2 é primo e temos que $n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2$.
Repetindo este procedimento, obtemos uma sequência decrescente de inteiros positivos $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Como todos eles são inteiros maiores do que 1, este processo deve terminar. Como os primos na sequência $p_1, p_2, \ldots, p_k$ não são, necessariamente, distintos, n terá, em geral, a forma:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1^{a_1} \cdot q_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot q_j^{a_j}$$

.

Para mostrarmos a unicidade, usamos indução forte em n. Para $n = 2$, vemos que a afirmação é verdadeira. Assumimos, então, que ela se verifica para todos os inteiros maiores do que 1 e menores do que n. Vamos provar que ela também é verdadeira para n. Se n é primo, a demonstração está feita. Vamos supor, então, que n seja composto e que tenha duas fatorações, ou seja:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s.$$

$$n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_r.$$

Vamos provar que $s = r$, e que cada p_i ($1 \leq i \leq s$) é igual a algum q_j ($1 \leq j \leq r$). Temos que, como p_1 divide o produto $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_r$, então ele divide pelo menos um dos fatores q_j. Sem perda de generalidade, podemos supor que $p_1 \mid q_1$. Como ambos os números são primos, isto implica que $p_1 = q_1$. Logo, temos:

$$\frac{n}{p_1} = p_2 \cdot \ldots \cdot p_s = q_2 \cdot \ldots \cdot q_r.$$

Como $1 < \dfrac{n}{p_1} < n$, a hipótese de indução nos diz que as duas fatorações são idênticas, isto é, $s = r$ e, a menos da ordem, as fatorações $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$ e $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot \cdot q_r$ são exatamente iguais.

■

2.3 Infinitude dos números primos

Teorema 2.2. *A sequência dos números primos é infinita.*

Demonstração:

Tal demonstração baseia-se por uma técnica conhecida como redução ao absurdo, ou, demonstração por contradição. Esta técnica consiste em supor inicialmente uma determinada hipótese, e ao desenvolver uma determinada sequência lógica, chega-se a uma contradição, um absurdo, sendo então a hipótese inicial negada.

Vamos supor inicialmente que a sequência dos números primos seja finita. Temos então $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ como sendo o conjunto de todos os números primos. Considerando o número $R = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$, temos que R não é divisível por nenhum dos p_i $(1 \leq i \leq n)$ da nossa lista, e que R é maior do que qualquer p_i. Porém, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, temos que R é primo ou possui algum fator primo. Note que $R \notin P$, o que contradiz a nossa hipótese que P é finito. Com isso, podemos concluir que o conjunto dos números primos é infinito.

■

2.4 À procura dos números primos

Platão (aproximadamente 428 a.C. - 348 a.C.) foi um matemático e filósofo grego, fundador da Academia de Atenas, primeira instituição de educação superior do mundo ocidental, teve um aluno chamado Euclides de Alexandria, este, por sua vez, muito interessado pelo mundo da Filosofia e da Matemática, escreveu um livro denominado *Os Elementos*. Tal livro possui grande parte dos fundamentos elementares essenciais para a Geometria, por este motivo, Euclides é considerado por muitos matemáticos como o pai da Geometria.

Figura 1: Euclides de Alexandria

Fonte: <https://editoraunesp.com.br/>

Porém, o grande diferencial dessa obra é que, além de trazer grandes contribuições para a Geometria, traz também conceitos e definições sobre a Teoria dos Números. Tais conceitos são utilizados e estudados pelos matemáticos até os dias atuais. Atualmente, *Os Elementos* é um conjunto de livros que dão fundamentos para a base da Matemática. No livro VII, Definição 2, sob a tradução de Bicudo (2009), Euclides diz:

"Um número é uma pluralidade composta de unidades."

Euclides, livro Os Elementos.

Tal definição de Euclides nos permite observar os números como um conjunto. Porém, ao analisar as propriedades de alguns conjuntos de números, percebe-se que existem alguns conjuntos que são, de certa forma, especiais; especificamente os números primos, um conjunto de números com características especiais descobertas pelos antigos matemáticos. Euclides decide então se debruçar em seus estudos sobre os números primos, sendo então, o primeiro a mostrar através da argumentação lógico-matemática que o conjunto dos números primos é infinito. E em seu livro IX, na Proposição 20, ele diz:

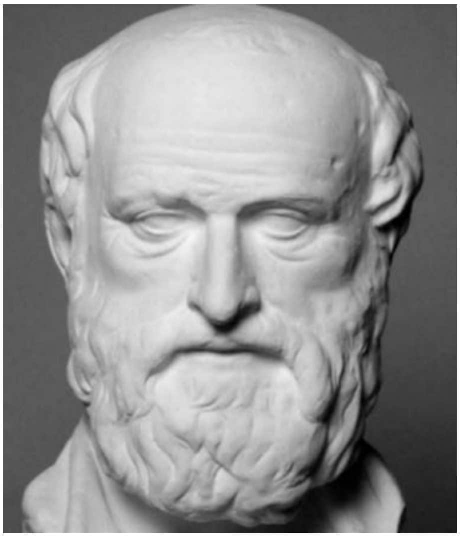
"Os números primos são mais numerosos do que toda a quantidade que tenha sido proposta de números primos."

Euclides, livro Os Elementos.

Partindo desse teorema, será que conseguiremos então determinar quantos números primos há entre 1 e algum outro número inteiro positivo? Por exemplo, quantos números primos há entre 1 e 50? Avançando um pouco mais no tempo, iremos analisar agora a abordagem de Eratóstenes para os números primos. Segundo Eves (1997), Eratóstenes viveu no século III a. C, nasceu em Cirene, mas passou grande parte da sua vida em Atenas e depois foi para Alexandria, onde foi bibliotecário da universidade local. Trabalhou como astrônomo, matemático, geógrafo, historiador, filósofo, atleta e poeta. Ele desenvolveu um método que posteriormente ficou conhecido por Crivo de Eratóstenes. Tal aplicação reconhecia números primos entre 1 e um certo n inteiro. Por exemplo, quantos números primos existem entre 1 e 100? Quais são esses números? O Crivo de Eratóstenes era capaz de responder essas perguntas.

O algoritmo consiste no método da eliminação, onde são descartados os números os quais sabemos que não são primos. É um método simples, porém, muito eficaz. Vejamos um exemplo: quantos números primos existem de 1 a 16? Quais são esses números? Inicialmente, montaremos uma tabela com tais números.

Figura 2: Busto de Eratóstenes



Fonte: <https://www.iag.usp.br/>

Tabela 2.1: Tabela numérica

1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**

Fonte: Elaborado pelo autor

Agora iremos eliminar os números que sabemos que não são primos, como o número 1 e os múltiplos de todos os outros números primos. Eliminaremos o 4, 6, 8, 10, 12 e 16 que são múltiplos de 2, o 9 e o 15 que são múltiplos de 3, e assim sucessivamente. Para exemplificar, colocaremos as células eliminadas em vermelho, indicando que aquele número foi excluído. Os números que sobraram do nosso algoritmo, ficarão com as células em verde. Nossa tabela ficará da seguinte forma:

Tabela 2.2: Algoritmo aplicado na tabela numérica

1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**

Fonte: Elaborado pelo autor

Note que os números dentro da célula verde, responde a nossa pergunta inicial: quantos números primos existem de 1 a 16? Fazendo a contagem, temos seis números primos.

Quais são esses números? São 2, 3, 5, 7, 11 e 13, conforme mostrado no algoritmo. Observe que para números pequenos o processo de análise e contagem é relativamente simples, porém, e se quiséssemos saber a quantidade de números primos de 1 a 500? Agora o processo seria mais trabalhoso, o que não é tão interessante para otimização do tempo gasto na análise. Mas, para números maiores, ficaríamos testando e eliminando para todos os números da lista? Existe algum critério de parada? Sim! Por exemplo, para descobrirmos a quantidade de números primos menores que $n \in \mathbb{N}$, o critério de parada do Crivo de Eratóstenes é "eliminar" todos os números até os mútiplos de $\sqrt{n}$, onde n é o maior número a ser analisado. Em nosso caso, estamos analisando o número 16, então, iremos verificar o algoritmo do Crivo até os múltiplos de 4, pois $\sqrt{16} = 4$. Para raiz quadrada não exata, arredondaremos o resultado de $\sqrt{n}$ para o maior inteiro menor ou igual ao resultado. Por exemplo, se quiséssemos saber os números primos até 30, utilizaríamos como critério de parada $\sqrt{30}$, que neste caso, seria aproximada para 5, onde aplicaríamos o algoritmo até os múltiplos de 5.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707 - 1783), um importante matemático suíço, também trouxe grandes contribuições para a Matemática, principalmente para o campo da Teoria dos Números. Euler teve como um dos seus principais estudos a análise sobre o infinito. Tal conhecimento constitui um dos fundamentos indispensáveis da Matemática Moderna. Em 1723, com 16 anos, ele recebeu o grau de Mestre em Artes, com uma dissertação que comparava os sistemas de Filosofia Natural de Newton e Descartes (D'AMBROSIO, 2009).

Euler começou a se dedicar aos estudos dos padrões matemáticos, e já mais velho, em 1770 com 63 anos, ele publica seu livro de problemas matemáticos *"A Álgebra"*.

Figura 3: *A Álgebra*


Vollständige
Anleitung
zur
Algebra
von
Hrn. Leonhard Euler.
Zweyter Theil.
Von Auflösung algebraischer Gleichungen
und der unbestimmten Analytic.
St. Petersburg.
gedruckt bey der Kays. Acad. der Wissenschaften 1770.

Fonte: <https://rbhm.org.br/>

Nessa publicação, Euler traz um compilado de seus estudos algébricos onde há alguns tópicos abordando os números primos, dentre eles, o Polinômio de Euler, um polinômio $p(n)$ que relaciona números primos de uma forma bem interesante. O polinômio de Euler é expresso como: $p(n) = n^2 - n + 41$. Se assumirmos valores inteiros para n $(n \geq 0)$, perceba o que acontece:

$$p(0) = 0^2 - 0 + 41 = 41$$

$$p(1) = 1^2 - 1 + 41 = 41$$

$$p(2) = 2^2 - 2 + 41 = 43$$

$$p(3) = 3^2 - 3 + 41 = 47$$

$$p(4) = 4^2 - 4 + 41 = 53$$

$$p(5) = 5^2 - 5 + 41 = 61$$

$$p(6) = 6^2 - 6 + 41 = 71.$$

Note que, para valores inteiros de 0 a 6, o polinômio $p(n)$ retorna apenas números primos. Tal polinômio foi uma grande descoberta no estudo dos números primos, pois imaginou-se que existiria então uma fórmula para expressar números primos. Porém, o padrão do Polinômio de Euler de retornar apenas números primos é válido de $n = 0$ até $n = 40$, pois, para $n = 41$ temos que $p(41) = 1.681 = 41 \cdot 41$, que não é um número primo. Euler também formulou uma função $\varphi(n)$ que determinava a quantidade de números inteiros positivos que são primos com um determinado n. Números primos entre si pertencem a um conjunto de dois ou mais números naturais cujo único divisor comum a todos eles seja o número 1. Por exemplo: de 1 a 10, quantos números são primos entre si com o próprio 10? Perceba que tais números são 1, 3, 7 e 9, temos então 4 números. Note que 9 não é um número primo, mas 9 e 10 são primos entre si, pois o maior divisor comum (mdc) entre 9 e 10 é 1. Para números pequenos o processo de contagem é relativamente simples, mas, e se quiséssemos saber quantos números de 1 a 1.000 são primos entre si com o próprio 1.000? Perceba que o processo de contagem agora é um pouco mais trabalhoso. Para isso, Euler desenvolveu uma função que posteriormente ficou conhecida como função $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

ou na forma de produtório:

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

em que n é o número que desejamos analisar e $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são os números primos presentes na fatoração de n. Para o caso mencionado, temos como fatoração que $1.000 = 2^3 \cdot 5^3$. Iremos então utilizar a função $\varphi(n)$ como sendo:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right),$$

onde p_1 e p_2 são fatores primos do número dado, neste caso, $p_1 = 2$, $p_2 = 5$. Aplicando na função, temos:

$$\begin{aligned}
\varphi(1000) &= 1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\
\varphi(1000) &= 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \\
\varphi(1000) &= 400.
\end{aligned}$$

Logo, de 1 a 1000, há quatrocentos números que são primos com o próprio 1000. Tal fórmula traz uma excelente praticidade para a Teoria dos Números e principalmente para o estudo dos números primos. Aplicando a mesma fórmula para o nosso problema inicial: de 1 a 10, há quantos números primos entre si com o próprio 10?

$$\begin{aligned}
\varphi(10) &= 10 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\
\varphi(10) &= 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \\
\varphi(10) &= 4.
\end{aligned}$$

Temos então quatro números; exatamente como havíamos contabilizado anteriormente. Perceba então, a importância de tais soluções para os estudos dos números primos trazidas aqui por Leonhard Euler.

Figura 4: Leonhard Euler

Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/>

É importante citar que o número conhecido como e (um número irracional que vale aproximadamente 2,718), já era um número conhecido. Foi incialmente deduzido pelo matemático suíço Jacob Bernoulli (1655 - 1705) em seus estudos sobre Matemática Financeira. Posteriormente esse número foi deduzido para sua forma analítica como

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Tal número tem extrema importância, além de estar presente em outras relações matemáticas como a Identidade de Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

que além de relacionar o próprio número e, relaciona também outras duas constantes matemáticas importantes: i, a unidade imaginária dos números complexos e π, a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Veremos posteriormente uma aplicação do logaritmo cuja base é o número e. Para isso, iremos então adotar que $\log_e(x) = ln(x)$, também chamado de logaritmo natural.

No final do século XVIII, iniciando o século XIX, outro grande matemático se destaca em seus estudos: Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), um matemático alemão que contribuiu em diversas áreas da ciência, dentre elas a Teoria dos Números, Estatística, Análise Matemática, Geometria Diferencial, Geofísica, Astronomia e os estudos da Óptica. Atualmente, talvez Gauss seja mais conhecido pela criança prodígio que foi, onde a história nos diz que, quando Gauss tinha 10 anos, seu professor pediu que os alunos somassem todos os números inteiros de um a cem. Com precisão e rapidez, ele informou o resultado: 5.050. (EVES, 1997).

Gauss encontrou o seguinte padrão: por exemplo, vamos determinar qual a soma dos números de 1 a 5. Observe o seguinte desenvolvimento:

Tabela 2.3: Soma de Gauss

	1	+	**2**	+	**3**	+	**4**	+	**5**
+	**5**	+	**4**	+	**3**	+	**2**	+	**1**
	6		**6**		**6**		**6**		**6**

Fonte: Elaborado pelo autor

Note que, dispondo os números em ordem crescente, em seguida em ordem decrescente e somando as colunas, o resultando é sempre o mesmo. Gauss percebeu que foram

Figura 5: Retrato de Gauss

Fonte: <https://www.surveyhistory.org/>

somados números equidistantes da ordem crescente com a decrescente, porém, essa soma foi efetuada duas vezes, então bastava dividir o resultado por dois. Para este caso temos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{(1 + 5) \cdot 5}{2} = 15.$$

Gauss então expandiu esse algoritmo para os números de 1 a 100, conforme foi solicitado a soma pelo professor. Então, foi feito:

$$1 + 2 + \ldots + 100 = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5.050.$$

Isso mostrou então o brilhantismo do pequeno aluno ao professor. Dessa dedução de Gauss, surge então a fórmula para calcular a soma dos números inteiros de 1 até n, sendo:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}.$$

O mesmo método acima foi utilizado para calcular a soma dos n primeiros elementos de uma progressão aritmética:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Neste caso, S_n é a soma dos n primeiros elementos, a_1 é o primeiro elemento da sequência, a_n é o último elemento a ser somado e n é a quantidade de elementos que serão somados da sequência.

Voltando para a questão dos números primos, um fato importante a se considerar é que Gauss foi aluno de Euler, com o qual absorveu conhecimentos necessários para continuar a desenvolver sua matemática. Eis que então, Gauss com todo seu brilhantismo, conjectura aos 16 anos o que posteriormente ficou conhecido como o ***Teorema dos Números Primos***. Tal teorema nos permite encontrar uma excelente aproximação para quantos números primos há de 1 até um determinado valor x. O teorema foi enunciado da seguinte forma:

"Seja $\pi(x)$ a quantidade de números primos menores que, ou iguais a x, então temos que $\pi(x)$ tende a $\frac{x}{ln(x)}$ para valores cada vez maiores de x".

Matematicamente, temos:

$$\pi(x) \approx \lim_{x \to \infty} \frac{x}{ln(x).}$$

Gauss sempre foi fascinado pelos números primos e tentava incansavelmente encontrar um padrão nesse conjunto misterioso de números; conjecturar esse padrão $\pi(x)$ foi apenas uma das suas brilhantes descobertas na Teoria dos Números. Tal padrão só foi provado verdadeiro cem anos depois, pelo matemático francês Jacques Hadamard (1865 - 1963), juntamente com o matemático belga Charles-Jean de La Vallée Poussin (1866 - 1962).

Vamos testar a função $\pi(x)$ de Gauss para calcular uma aproximação de quantos números primos há até 10. Temos então que:

$$\pi(10) \approx \frac{10}{ln(10)} \approx 4,34.$$

Considerando apenas a parte inteira, de fato, temos quatro números primos de 1 até 10, que são 2, 3, 5 e 7. Note que a função $\pi(x)$ retorna um valor aproximado, porém, nos traz excelentes aproximações para valores cada vez maiores de x.

A procura pelos números primos sempre foi constante; tentar descobrir uma fórmula que retornasse apenas números primos fascinou diversos matemáticos; estamos então diante de um dos maiores problemas em aberto da história da Matemática. Saber se um determinado número é primo também não é uma tarefa tão simples quando se tem um número extremante grande. Os métodos conhecidos até aqui são trabalhosos e os métodos mais sofisticados retornam valores aproximados, porém, as buscas por números primos cada vez maiores encantam os matemáticos até hoje (STEWART, 2014).

No ano de 1900, o matemático alemão David Hilbert (1862 - 1943) durante a conferência do Congresso Internacional de Matemáticos de Paris, propôs uma lista de 23 problemas matemáticos considerados os mais difíceis da época. Alguns problemas foram resolvidos, outros ainda continuam em aberto. O fato interessante é que a conjectura de Goldbach, que será vista posteriormente, é um dos problemas da lista de Hilbert que continuam em aberto.

2.5 Aplicações

Uma das principais aplicações dos números primos é no sistema de criptografia e segurança de dados. Para entendermos a sua aplicação, é necessário estudarmos a evolução dos métodos de criptografia. Um dos primeiros sistemas de criptografia desenvolvidos foi a criptografia de César, mais conhecida como “Cifra de César”. Desenvolvido pelo imperador romano Júlio César (100 a.C. - 44 a.C.), esse sistema é um dos mais antigos e simples métodos de criptografia conhecidos. O método, apesar de ser um dos pioneiros, não envolve diretamente os números primos, porém, a fim de entendermos melhor o sistema de criptografia, iremos analisá-lo. O algoritmo consiste em substituir cada letra do alfabeto por outra letra que esteja um certo número de posições à frente ou atrás no alfabeto. Esse número de posições é chamado de “chave” e pode ser qualquer número inteiro. Por exemplo, se a chave for 3, a letra A seria substituída por D, a letra B seria substituída por E, e assim por diante. A mensagem original é escrita usando a cifra, e para decifrá-la, basta aplicar a mesma chave e retroceder o número de posições correspondentes para cada letra da mensagem cifrada.

Apesar de ser um método bastante simples, a Cifra de César foi muito utilizada ao longo da história, e ainda é usada em alguns casos simples de criptografia. No entanto, hoje em dia ela é considerada insegura, já que é facilmente quebrada com ferramentas de análise estatística de texto.

Figura 6: Disco da cifra de César

Fonte: <https://projects.raspberrypi.org/>

Por exemplo, suponha que a chave escolhida seja 5 e a mensagem a ser cifrada seja “MATEMATICA”. Para cifrar essa mensagem, basta substituir cada letra por outra que esteja 5 posições à frente no alfabeto (poderia ser utilizado o disco da cifra de César para realizar as rotações necessárias). Assim, a palavra “MATEMATICA” seria cifrada como “RFYJRFYNHF”. Para decifrar a mensagem, basta aplicar a chave -5 (ou 21, já que $26 - 5 = 21$) e retroceder 5 posições no alfabeto para cada letra da mensagem cifrada. Esse sistema, apesar de eficiente, não é tão seguro, pois, como algumas palavras possuem repetições de letras, fazendo uma análise cautelosa, a palavra poder ser “descriptografada” em um período curto de tempo. Com isso, como montar então um sistema de criptografia mais seguro? Utilizando números primos!

Uma das aplicações mais conhecidas dos números primos na criptografia é o algoritmo

RSA, que é um dos sistemas criptográficos mais utilizados na atualidade. Esse sistema se baseia na dificuldade de se fatorar números grandes, que é uma tarefa extremamente complexa e que consome muitos recursos computacionais. O algoritmo RSA utiliza o produto entre dois números primos grandes e diferentes para gerar chaves públicas e privadas, que são usadas para criptografar e decifrar informações (PERUZZO, 2017).

A segurança do sistema depende da dificuldade ou até impossibilidade de se fatorar números extremamente grandes em um tempo viável, mesmo com recursos computacionais avançados. Por exemplo, sendo montada uma "chave" com o número 15, quais foram os números primos que o produto resultaram em 15? Para este exemplo simples, é fácil ver utilizando a fatoração que estes números são 3 e 5, pois $3 \cdot 5 = 15$. Porém, montando agora uma "chave" com o número 58.801, quais números primos geraram esse número com seu produto? Agora, é uma tarefa um pouco mais trabalhosa para se fazer manualmente, porém, com um auxílio de um computador, podemos verificar que $58.801 = 127 \cdot 463$. Acontece que para números cada vez maiores, o processamento computacional ficará comprometido devido a alta quantidade de informação que precisará ser computada.

Vamos imaginar agora uma "chave" que é um número inteiro $n = p \cdot q$, com 50 algarismos, onde p e q são números primos distintos. Temos então que $n < 10^{50}$. Portanto, $\sqrt{n} < 10^{25}$, ou seja, pelo algoritmo da tentativa de fatoração já visto, precisaríamos testar o algoritmo até os múltiplos de $\sqrt{n}$, que sabemos que é menor que 10^{25}. Pelo *Teorema dos Números Primos*, visto no *subcapítulo 2.3*, temos que existem, aproximadamente, $1,7 \times 10^{23}$ números primos menores que 10^{25}.

De acordo com o site oficial da USP (Universidade de São Paulo), seu supercomputador inaugurado em 2015 faz cerca de 20 trilhões (2×10^{13}) de cálculos por segundo, ou seja, para esse supercomputador realizar uma única testagem vericando se n é divisível por um número primo, ele levaria apenas $0,00000000000005$ ou 5×10^{-14} segundos. Porém, se utilizássemos esse supercomputador para realizar todos os cálculos de testagem do exemplo anterior, precisariamos de aproximadamente

$$\frac{1,7 \times 10^{23}}{2 \times 10^{13}} = 8,5 \times 10^{9}$$

segundos, o que levaria em torno de 269 anos para realizar todos os testes com os cálculos necessários. Se imaginarmos produtos de números primos ainda maiores, já que o conjunto dos números primos é infinito, o tempo para calcular esses resultados tenderia a aumentar exponencialmente. Isso nos mostra o poder dos números primos e a sua importância em algoritmos de criptografia, já que um "ataque a força bruta" em um sistema computacional criptografado levaria anos para ser quebrado. É notório que essas aplicações de "chaves" é de grande utilidade na Computação e segurança de dados.

Os números primos também possuem aplicações na Física. Embora não tão comum, um exemplo de como os números primos podem estar envolvidos na Física é através da

Teoria dos Grupos. Os grupos são usados para descrever simetrias na Física e os números primos são importantes para determinar o tamanho e a estrutura desses grupos. Por exemplo, o grupo de simetria de uma partícula elementar pode ser descrito em termos de um grupo finito, como um grupo cíclico, que é baseado em números primos. Na Física Quântica (ramo da Física que estuda interações em níveis atômicos), os números primos são usados na teoria quântica de campos para descrever o comportamento entre partículas elementares.

Dentro da Física Quântica, existe a Mecânica Quântica, que é uma teoria física que descreve o comportamento das partículas subatômicas. Na Mecânica Quântica, a distribuição de energia dos estados quânticos é dada pela função zeta de Riemann. Essa função matemática é definida como a soma de uma série infinita que envolve os números primos. Essa conexão entre os números primos e a distribuição de energia dos estados quânticos é conhecida como a Hipótese de Riemann, um problema matemático ainda em aberto que tem sido objeto de pesquisa intensa. A relação entre a função zeta de Riemann e os números primos foi descoberta pelo matemático alemão Bernhard Riemann ($1826-1866$) em 1859, e é considerada uma das conexões mais profundas entre a Matemática e a Física. A forma como os números primos se distribuem na função zeta de Riemann é importante para entender a distribuição de energia dos estados quânticos, o que tem implicações para o comportamento de partículas subatômicas (ALVITES, 2012).

Há também aplicações na Teoria das Cordas, que é uma teoria que postula que as partículas fundamentais são cordas vibrantes em várias dimensões extras além das três dimensões espaciais e uma dimensão temporal que percebemos no nosso universo. Essas dimensões extras são "enroladas" em si mesmas e só são percebidas em escalas muito pequenas. A Teoria das Cordas propõe que a natureza das cordas é descrita por uma equação matemática conhecida como equação de onda.

As dimensões extras necessárias para a Teoria das Cordas funcionar são descritas em termos de números primos. Esses números primos aparecem como comprimentos mínimos para as dimensões extras, conhecidos como raios de compactificação. Por exemplo, se assumirmos que o raio de compactificação de uma das dimensões extras é um número primo, isso significa que a dimensão extra tem um comprimento mínimo de um múltiplo do número primo. Esses comprimentos mínimos são importantes para garantir a consistência matemática da teoria. A conexão entre os números primos e a Teoria das Cordas é mais uma prova da profundidade da relação entre a Matemática e a Física. A Teoria das Cordas é uma área de pesquisa muito ativa na Física Teórica, e a conexão entre os números primos e a Teoria das Cordas é um exemplo fascinante de como a Matemática pode ajudar a entender os fenômenos físicos mais complexos. (REIS, 2021).

Por fim, ainda na Física, temos aplicações também na Astronomia. Um exemplo acontece quando um planeta extrassolar passa na frente de sua estrela hospedeira, ele bloqueia parte da luz da estrela e produz uma pequena queda no brilho observado. Para identificar com precisão o período de trânsito do planeta, os astrônomos procuram por números primos que representem a duração do período de trânsito. Isso ocorre porque, se o período de trânsito for um número inteiro, ele será divisível por muitos outros números, o que torna difícil distinguir os sinais de trânsito planetário dos sinais de ruído estelar. Por outro lado, se o período de trânsito for um número primo, ele será divisível apenas por 1 e por si mesmo, tornando mais fácil detectar o sinal do planeta.

Nas galáxias, a sua distribuição no universo segue uma lei conhecida como lei de potência. Essa lei descreve a relação entre o número de galáxias e sua luminosidade, e é semelhante à Lei de Zipf, lei que descreve a distribuição de palavras em textos. Os números primos aparecem em modelos matemáticos da lei de potência, que indicam que a distribuição de galáxias segue uma lei de potência com base nos números primos. Esses modelos sugerem que a distribuição de galáxias é influenciada por fatores como a densidade do universo e a distribuição de energia escura (ALVITES, 2012).

A idade do Universo também pode ser calculada utilizando os números primos. Esse cálculo pode ser realizado usando o tempo de vida das estrelas mais antigas conhecidas como estrelas globulares. As estrelas globulares são aglomerados estelares muito antigos, que contêm centenas de milhares de estrelas. A idade dessas estrelas pode ser determinada medindo-se a quantidade de elementos radioativos em suas atmosferas. Os números primos são usados para determinar a idade dessas estrelas porque eles são importantes na identificação dos elementos radioativos mais estáveis que são usados para determinar a idade das estrelas globulares.

É notório ver as diversas aplicações dos números primos. Desde sistemas de criptografia e segurança de dados até os padrões da natureza atômicas da Física Quântica e Teoria das Cordas; no universo interestelar como distâncias de planetas e sua localização no espaço; no padrão como as galáxias são distribuídas e na determinação da idade do universo. Tais aplicações são fascinantes e mostram como a Matemática descreve os padrões da Natureza.

2.6 Primos de Mersenne

Era 8 de setembro de 1588, em uma família de camponeses nascia Marin Mersenne (1588 - 1648) na França. Apesar de poucas informações sobre sua infância, sabe-se que aos 16 anos, Mersenne foi para Sorbonne (antiga Univerdade em Paris), estudar Teologia com os jesuítas (membros de uma ordem religiosa cristã).

Nessa época, existia uma grande dualidade entre a igreja católica e a comunidade científica. Diante dessa grande disputa e movido pela curiosidade em aprender mais, Mersenne então conhece os trabalhos de Galileu (1564 - 1642), grande astrônomo da época, ficando então cada vez mais entusiasmado em pesquisar por assuntos científicos. Um pouco mais velho, começa então a estudar ondulatória, ficando conhecido por seus estudos em acústica e música, onde ele aplicou suas habilidades matemáticas para analisar as propriedades do som. Ele publicou vários livros sobre o assunto, incluindo *"Harmonie Universelle"* em 1636, uma obra de três volumes sobre teoria musical.

Além de seus trabalhos em música e acústica, Mersenne também fez contribuições significativas para a Matemática e a Física, tendo contato através de correspondências com grandes matemáticos da época, como Descartes (1596 - 1650), Fermat (1607 - 1665), Pascal (1623 - 1662) e Torricelli (1608 - 1647). Mersenne também desempenhou um papel importante no desenvolvimento da ciência experimental. Ele defendeu a importância de testar ideias e teorias por meio da experimentação, em vez de simplesmente confiar na especulação ou na autoridade. Ele acreditava que a ciência deveria ser uma busca pela verdade objetiva, e que isso só poderia ser alcançado por meio da observação cuidadosa e da experimentação. Ele se tornou então um pensador influente em sua época, e suas ideias e trabalhos ajudaram a lançar as bases para muitos dos avanços científicos e filosóficos que se seguiriam nos séculos seguintes.

Figura 7: Retrato de Mersenne

Fonte: <https://www.deviantart.com/>

Em uma de suas cartas enviadas a Mersenne, Fermat afirma que os números escritos na forma $F_n = 2^{2^n} + 1$, são números primos, onde $n \in \mathbb{N}$. Tais números ficaram conhecidos como *"Números de Fermat"* e deixou Mersenne fascinado com os números primos. De fato, se testarmos variando o valor de n, temos:

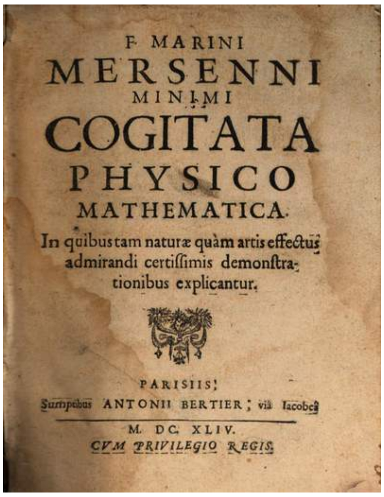
$$\begin{aligned} F_0 &= 2^{2^0} + 1 = 3 \\ F_1 &= 2^{2^1} + 1 = 5 \\ F_2 &= 2^{2^2} + 1 = 17 \\ F_3 &= 2^{2^3} + 1 = 257 \\ F_4 &= 2^{2^4} + 1 = 65.537. \end{aligned}$$

Porém, perceba que quanto maior o valor de n, maior será o valor de F_n, sendo cada vez mais difícil verificar se F_n é um número primo, principalmente com os conhecimentos do século XVII. No entanto, se calcularmos o valor de F_5, iremos obter como resultado

$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$, o que aparenta ser um número primo. Eis que então, o matemático suíço Leonhard Euler mostra que F_5 é um número composto, podendo ser escrito como $F_5 = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6.700.417$.

Mersenne então se dedica ao estudo do conjunto dos números primos, tentando encontrar um padrão numérico que satisfaça uma lei de formação. Ele parte dos Números de Fermat ($F_n = 2^{2^n} + 1$) e começa a desenvolver seu trabalho, analisando e verificando para quais valores o resultado seria um número primo. Após um longo estudo minucioso e detalhado, ele começa a escrever um dos seus principais trabalhos, e em 1644, Mersenne o publica, chamando de *"Cogitata Physico-Mathematica"*, onde é apresentada a maioria dos seus estudos sobre os números primos. Tal trabalho foi mundialmente prestigiado pelos matemáticos da época.

Figura 8: Artigo de Mersenne



F. MARINI
MERSENNI
MINIMI
COGITATA
PHYSICO
MATHEMATICA.
In quibus tam naturæ quàm artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur.
PARISIIS,
Sumptibus ANTONII BERTIER, via Iacobea.
M. DC. XLIV.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Fonte: <https://www.europeana.eu/>

Dentre os estudos publicados por Mersenne nesse artigo, estava uma análise para sobre um padrão numérico interessante, os *Números de Mersenne*.

Definição 2.3. *Sendo $n \in \mathbb{Z}$ e $n > 1$, temos que M_n será um número de Mersenne quando $M_n = 2^n - 1$.*

Proposição 2.1. *Se M_n é um número primo, então n também é um número primo.*

Demonstração:

Para demonstrar essa particularidade, iremos utilizar a contrapositiva, ou seja, iremos provar que, se n é composto, então M_n também é composto. Para isso, faremos $n = a \cdot b$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a, b > 1$. Agora basta mostrarmos que se $a \mid n$, então $M_a \mid M_n$. De fato,

$$\begin{aligned} M_n &= 2^n - 1 \\ M_{ab} &= 2^{ab} - 1 \\ M_{ab} &= (2^a - 1) \cdot (2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \ldots + 2^a + 1) \\ M_n &= M_a \cdot k. \end{aligned}$$

Com $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, temos que M_n é composto.

■

A recíproca não é válida. Por exemplo, para $n = 11$, temos $M_{11} = 2.047 = 23 \cdot 89$. Portanto, n ser um número primo é uma condição necessária, mas não suficiente para que M_n também seja um número primo.

Podemos então simplificar a nossa expressão e dizer que, para $M_n = p$ (p um número primo), n também será um número primo. Sendo assim:

$$M_p = 2^p - 1.$$

Todos os números primos que possam ser escrito dessa forma ficaram conhecidos como *Primos de Mersenne*. Importante citar que, nem todo número primo poderá ser escrito na forma M_p, como por exemplo, o número 5.

Para Mersenne, ele teria então encontrado uma fórumla que, teoricamente, descreveria o padrão dos números primos. Nesse artigo, devido a limitação da época, foram testados os números de forma M_p até $p = 257$.

Tais números são interessantes para os matemáticos pois sua forma simples permite a aplicação de técnicas matemáticas complexas para estudá-los. O que torna esse enunciado tão interessante é que, será que existem infinitos *Primos de Mersenne*? É um problema ainda em aberto.

Veja o exemplo para os 8 primeiros números primos:

Tabela 2.4: Os oito primeiros Primos de Mersenne

p	$2^p - 1$
2	3
3	7
5	31
7	127
13	8.191
17	131.071
19	524.287
31	2.147.483.647

Fonte: Elaborado pelo autor

Para cada caso acima, o resultado é um número primo, porém, note que fica cada vez mais difícil verificar se M_p é um número primo à medida que escolhemos valores mais altos para p.

Atualmente, os maiores números primos descobertos estão na forma $2^p - 1$, ou seja, são Primos de Mersenne, e a busca para números cada vez maiores continua. Para isso, em 1996, o programador George Woltman (1957 -) desenvolveu o *GIMPS* (Great Internet Mersenne Prime Search), que de modo simples, pode ser traduzido para "Maior Pesquisador de Primos de Mersenne da Internet". O *GIMPS* é um software que tem como objetivo utilizar o hardware do usuário para realizar cálculos e encontrar primos de Mersenne cada vez maiores. Ele está disponível gratuitamente para download no site oficial mersenne.org. Em 7 de dezembro de 2018, o programa encontrou o maior número primo conhecido até hoje:

$$2^{82.589.933} - 1,$$

que é o 51° Primo de Mersenne e possui 24.862.048 dígitos.

A descoberta de novos Primos de Mersenne é importante porque eles são úteis em muitas áreas da Matemática e da Ciência da Computação. Além disso, o projeto *GIMPS* oferece uma oportunidade para as pessoas contribuírem para a pesquisa científica sem precisar ter acesso a recursos caros ou ser um cientista profissional. O programa trabalha desde sua criação em computadores de diversos usuários pelo mundo que se disponibilizam de forma voluntária para colaborar com a descoberta de novos números primos. Tal trabalho é de extrema importância, pois ajuda a desenvolver a ciência e contribui para o avanço de novas tecnologias que utilizam os números primos.

Vale ressaltar que, caso o leitor tenha interesse em também participar do projeto, poderá facilmente colaborar utilizando um computador para realizar o *download* do software e executá-lo. O programa irá utilizar recursos para computar os dados. O site oficial mencionado possui todas as informações para novos colaboradores. O projeto *GIMPS* é uma iniciativa de pesquisa colaborativa fascinante que utiliza computação distribuída para descobrir novos números Primos de Mersenne, e que permite a participação de voluntários em todo o mundo. Com base no site do projeto, elaboramos a tabela a seguir.

Tabela 2.5: Os maiores primos de Mersenne

Descoberta	**Primo de Mersenne**
13/11/1996	$2^{1.398.269} - 1$
24/08/1997	$2^{2.976.221} - 1$
27/01/1998	$2^{3.021.377} - 1$
01/06/1999	$2^{6.972.593} - 1$
14/11/2001	$2^{13.466.917} - 1$
17/11/2003	$2^{20.996.011} - 1$
15/05/2004	$2^{24.036.583} - 1$
18/02/2005	$2^{25.964.951} - 1$
15/12/2005	$2^{30.402.457} - 1$
04/09/2006	$2^{32.582.657} - 1$
03/08/2008	$2^{43.112.609} - 1$

06/09/2008	$2^{37.156.667} - 1$
04/06/2009	$2^{42.643.801} - 1$
25/01/2013	$2^{57.885.161} - 1$
07/01/2016	$2^{74.207.281} - 1$
26/12/2017	$2^{77.232.917} - 1$
07/12/2018	$2^{82.589.933} - 1$

Fonte: Elaborado pelo autor

Além das aplicações dos números primos na criptografia já mencionadas, os números primos, principalmente os Primos de Mersenne, podem ser aplicados em diversas outras áreas, como por exemplo, para realizar o teste de primalidade de Lucas-Lehmer. Um algoritmo desenvolvido pelo matemático francês Édouard Lucas (1842 - 1891) e depois aperfeiçoado pelo matemático americano Derrick Henry Lehmer (1905 - 1991), cujo objetivo é verificar se um determinado número com grande quantidade de algarismos é primo. Um exemplo mais prático é na *Torre de Hanói*, um quebra-cabeça que consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação. O número de discos pode variar sendo que o mais simples contém apenas três discos. O interessante é que, se considerarmos S a quantidade mínima de movimentos para solucionar a *Torre de Hanói* e d a quantidade de discos, então temos que $S = 2^d - 1$, que é um Número de Mersenne, e como já vimos anteriormente, se S for primo, então essa quantidade mínima de movimentos será um *Primo de Mersenne*.

Os primos de Mersenne também são usados em códigos de correção de erros, que são utilizados para corrigir erros em transmissões de dados. Outra aplicação é na construção de grafos especiais, como o grafo de Golomb, desenvolvido pelo matemático americano Solomon Wolf Golomb (1932 - 2016) e é muito utilizado em telecomunicações. Por fim, os primos de Mersenne também são utilizados em protocolos de segurança de redes, como o protocolo de troca de chaves de Diffie-Hellman, um algoritmo de criptografia que é utilizado para trocar chaves ("senhas") de maneira segura em canal público; foi desenvolvido pelos matemáticos norte americanos Bailey Whitfield Diffie (1994 -) e Martin Edward Hellman (1945 -) e foi um dos primeiros exemplos práticos de métodos de troca de chaves implementado dentro do campo da criptografia, tendo sido publicado em 1976. Com isso, percebemos a importância dos primos de Mersenne.

2.7 Primos Gêmeos

Os Primos Gêmeos são um dos tópicos mais fascinantes e desafiadores da Teoria dos Números. Tais números são raros e sua natureza tem sido estudada pelos matemáticos desde a antiguidade. Os primos gêmeos são pares de números primos que diferem um do outro em apenas duas unidades, ou seja, sendo o par $(p, p+2)$, este será um par de primos gêmeos se, e somente se, p e $p+2$ também forem números primos, como por exemplo, o par (3, 5). Note que este pode ser escrito como $(p, p+2)$, onde $p = 3$.

O problema da infinitude dos primos gêmeos é tão antigo que foi pensado desde a época de Euclides, tendo este conjecturado que sim, existem infinitos pares de primos gêmeos. Porém, este padrão ainda é considerado um problema em aberto, pois, até o momento, não há uma demonstração concreta. Os primos gêmeos são importantes porque a sua existência é uma consequência da distribuição aleatória dos números primos. Em outras palavras, eles surgem a partir de propriedades fundamentais dos números primos. Isso torna o estudo dos primos gêmeos importante para a Teoria dos Números e para outras áreas da Matemática (MOREIRA; MARTÍNEZ, 2010).

Tal questão foi estudada de forma analítica inicialmente pelo matemático francês Alphonse de Polignac (1826 - 1863) e posteriormente revista pelo matemático alemão Paul Stäckel (1862 - 1919) e continua em aberto até o momento. A hipótese é bastante simples de ser enunciada, mas é muito difícil de ser provada. Até agora, os matemáticos só conseguiram estabelecer resultados parciais.

Polignac analisou um padrão interessante: existe uma certa quantidade de pares de números primos tais que a distância entre eles é sempre um número par. Tal enunciado também é um problema em aberto, já que não há prova matemática para tal afirmação, porém, se trata de uma declaração tão forte que em 1849, Polignac conjecturou em um dos seus artigos *(Recherches Nouvelles Sur Les Nombres Premiers)* que, sendo k um número inteiro positivo, existem infinitos pares de números primos p_1 e p_2 tais que $|p_2 - p_1| = 2 \cdot k$. Perceba que, se fizermos $p_2 > p_1$ e $k = 1$, temos o problema dos primos gêmeos, pois teremos que

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= 2 \cdot k \\ p_2 - p_1 &= 2 \cdot 1 \\ p_2 - p_1 &= 2 \\ p_2 &= p_1 + 2. \end{aligned}$$

Esse conjunto dos Primos Gêmeos, pensado por Euclides e posteriormente analisado como uma caso específico dos pares numéricos conjecturado por Polignac é extremamente fascinante dentro da Teoria dos Números. Observe a formação dos dez primeiros pares de Primos Gêmeos na forma $(p,\ p+2)$ dispostos na tabela a seguir.

Tabela 2.6: Os dez primeiros pares de Primos Gêmeos

p	$p+2$
3	**5**
5	**7**
11	**13**
17	**19**
29	**31**
41	**43**
59	**61**
71	**73**
101	**103**
107	**109**

Fonte: Elaborado pelo autor

Em 2013, Yitang Zhang (1955 -), matemático chinês, provou que existe um número infinito de pares de números primos separados por uma distância de no máximo 70 milhões de unidades. O trabalho de Zhang foi considerado um grande avanço, pois foi a primeira vez que um matemático conseguiu provar que existem infinitos pares de primos gêmeos com uma separação máxima finita. No entanto, a sua prova não é suficiente para estabelecer o problema geral dos primos gêmeos. Existem várias técnicas matemáticas que podem ser usadas para estudar os primos gêmeos, uma das mais importantes é a análise assintótica, que se concentra no comportamento dos números primos em grande escala. A análise assintótica pode ajudar a entender como os primos gêmeos se distribuem ao longo da reta real.

Em 1915, o matemático norueguês Viggo Brun (1885 - 1978) provou que a soma dos inversos dos primos gêmeos é convergente, sendo enunciado então o *Teorema de Brun*. Ou seja, sendo p_n e p_{n+1} um par de primos gêmeos, se fizermos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_{n+1}}\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\dots,$$

o resultado irá convergir para uma constante, sendo essa chamada de *Constante de Brun*, que vale aproximadamente $1,90216$. Sendo extremamente curioso, tendo em vista que Euler provou que a soma dos inversos dos números primos P_n diverge. Isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\dots$$

não converge para um número real. Este fato torna os pares de Primos Gêmeos ainda mais desafiadores para serem interpretados.

Em 15 de setembro de 2016, o projeto computacional *TPS / PG* (Twin Prime Search / Prime Grid), projeto que estuda, analisa e cataloga a distribuição dos números Primos, encontrou, até o momento, o maior par de Primos Gêmeos descoberto atualmente. Tal par pode ser escrito como

$$2.996.863.034.895 \times 2^{1.290.000} \pm 1,$$

com 388.342 dígitos por número. Para efeito de comparação, se uma pessoa levasse um segundo para escrever cada dígito, seria necessário aproximadamente 4 dias ininterruptos para escrever todos os dígitos de apenas um número do par de primos gêmeos acima.

Outra particularidade interessante é a teoria dos pares de Siegel, que foi desenvolvida pelo matemático alemão Carl Ludwig Siegel (1896 - 1981) na década de 1930. A teoria dos pares de Siegel se concentra na interação entre os primos gêmeos e outros tipos de números primos, como os primos de Sophie Germain (1776 - 1831). Tais teorias têm sido usadas para estabelecer resultados relacionados aos Primos Gêmeos.

De forma semelhante aos Primos Gêmeos, os números conhecidos como *Primos de Sophie Germain*, são um conjunto de números escritos em pares na forma $(p,\ 2p+1)$, onde p e $2p+1$ são números primos. Tal conjunto numérico foi analisado, estudado e desenvolvido pela matemática francesa Marie-Sophie Germain. Em uma época arcaica onde as mulheres não eram bem vindas no mundo acadêmico, Sophie mostrou um talento e brilhantismo fascinante analisando padrões numéricos, trazendo grandes contribuições para a Teoria dos Números.

Figura 9: Retrato de Sophie Germain

Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/>

Os *Primos de Sophie Germain* são também um dos grandes problemas em aberto na Teoria dos Números, pois, assim como os Primos Gêmeos, não há uma demonstração sobre sua infinitude. Na tabela a seguir, temos os dez primeros pares de *Primos de Sophie Germain* na forma $(p,\ 2p+1)$:

Tabela 2.7: Os dez primeiros pares de *Primos de Sophie Germain*

p	$2p+1$
2	**5**
3	**7**
5	**11**
11	**23**
23	**47**
29	**59**
41	**83**
53	**107**
83	**167**
89	**179**

Fonte: Elaborado pelo autor

Sophie foi uma matemática brilhante. Dentre as contribuições mais notáveis, está uma análise sobre o *Último Teorema de Fermat* ($x^n + y^n = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$ e $n > 2$), onde já foi demonstrado que não existe solução para n inteiro maior que dois. Porém, Sophie Germain deu uma das primeiras contribuições para a demonstração desse teorema, mostrando que para o caso $n = p$, quando p e $2p + 1$ são números primos, o teorema é verdadeiro. Esse caso particular do teorema trouxe grande notoriedade para Sophie, principalmente sobre o seu estudo sobre tais números primos específicos. (MOREIRA; MARTÍNEZ, 2010).

Tais números são usados na teoria dos sistemas dinâmicos para estudar a estabilidade de sistemas caóticos, como o mapa logístico. Em geral, os primos de Sophie Germain têm uma ampla gama de aplicações em várias áreas da Matemática, da Criptografia e da Física, e seu estudo continua a ser de grande interesse para os pesquisadores em todo o mundo.

Essa relação de pares ordenados entre os Primos Gêmeos e os Primos de Sophie Germain traz grandes aplicações principalmente para a evolução dos computadores que utilizam um sistema forte de criptografia. Além da Teoria dos Números, os Primos Gêmeos também têm aplicações em outras áreas da Matemática e da Física. Por exemplo, eles aparecem em várias equações diferenciais parciais que modelam fenômenos físicos. A natureza dos Primos Gêmeos é um enigma para os matemáticos, mas os estudos sobre eles têm contribuído para o avanço da Teoria dos Números e para o desenvolvimento de novas técnicas matemáticas.

Capítulo 3

Conjecturas na Teoria dos Números

Conjecturas são comuns na Matemática, muitas vezes servindo como ponto de partida para novas pesquisas e descobertas. As conjecturas são desenvolvidas com base em observações e padrões identificados pelos matemáticos em seus estudos e pesquisas.

> Uma conjectura matemática é uma afirmação para a qual ainda não se dispõe de uma demonstração que comprove sua validade, ou de um contraexemplo para garantir que ela não é válida. Numa conjectura, alguém emite sua opinião sobre algum resultado e afirma sua convicção de que determinado fato é válido ou não. Como essa pessoa não consegue provar a opinião que deu, cabe à comunidade matemática encontrar uma demonstração ou um contraexemplo para a opinião emitida. É claro que para chamar uma sentença de conjectura deve-se ter bastante desconfiança da veracidade do que se está afirmando. (FILHO, 2013, p. 179).

Apesar de serem amplamente utilizadas na Matemática, conjecturas não são tratadas como verdades absolutas. Para que uma conjectura seja aceita como verdadeira, ela deve ser completamente provada por meio de um rigoroso processo matemático, que inclui demonstrações lógicas. Uma vez que uma conjectura é provada, ela se torna um teorema. Teorema é uma afirmação matemática cuja validade é comprovada por meio de uma demonstração.

Embora as conjecturas possam parecer um obstáculo para o progresso da Matemática, elas são uma fonte de inspiração para muitos matemáticos, que trabalham incansavelmente para encontrar novas maneiras de abordar esses problemas complexos. A exemplo, temos a Conjectura de Goldbach, Conjectura de Legendre e a Conjectura de Collatz, que veremos neste capítulo. É importante destacar que a conjectura é um importante instrumento de trabalho na matemática. Elas podem inspirar novas pesquisas e descobertas, além de fornecer novas direções para o avanço da ciência.

3.1 Conjectura de Goldbach

Christian Goldbach nasceu em 18 de março de 1690, na cidade de Königsberg, na Prússia Oriental (hoje Kaliningrado, Rússia) e faleceu em 1764, em Moscou (Rússia). Ele estudou Filosofia, História e Teologia na Universidade de Königsberg, mas foi a Matemática que o atraiu. Mais tarde, Goldbach estudou Matemática na Universidade de Königsberg, onde foi aluno de Gottfried Leibniz (1646 - 1716), famoso matemático alemão, que contribuiu para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Em 1710, ele se tornou professor de Matemática na Universidade de São Petersburgo, na Rússia, onde permaneceu por cerca de 20 anos. Sendo uma figura importante na comunidade matemática de seu tempo, ele manteve correspondência com muitos dos principais matemáticos da época, incluindo Leonhard Euler.

Figura 10: Retrato de Christian Goldbach

Fonte: <https://clube.spm.pt/>

Além da Matemática, Christian Goldbach tinha interesses em outras áreas, ele era fluente em várias línguas, incluindo latim, grego, francês e inglês, e escreveu poesia e peças teatrais em seu tempo livre. Ele também era um grande apreciador de música e tinha habilidades em tocar violino. Em reconhecimento às suas contribuições para a Matemática, Goldbach foi eleito para a Royal Society de Londres em 1745. Ele também foi um membro da Academia de Ciências de São Petersburgo e da Academia de Ciências de Berlim.

Goldbach ficou conhecido por sua contribuição na Teoria dos Números, em particular, por uma conjectura que leva seu nome, a *Conjectura de Goldbach.* Esta conjectura afirma que todo número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos. Embora a conjectura ainda não tenha sido completamente provada, ela continua a intrigar e inspirar matemáticos em todo o mundo. A Conjectura de Goldbach foi apresentada em uma carta que ele escreveu para Euler em 1742. De forma analítica, a Conjectura de Goldbach pode ser descrita como:

Conjectura 3.1. *Sendo k um inteiro maior ou igual a 2, existem p_1 e p_2 primos tais que $2k = p_1 + p_2$.*

A conjectura de Goldbach é uma das conjecturas mais famosas da Teoria dos Números, e continua a intrigar e inspirar matemáticos em todo o mundo. Além disso, a pesquisa em torno da conjectura levou ao desenvolvimento de novas técnicas e ferramentas que podem ter aplicações em outras áreas da Matemática. (CHAVES et al., 2014).

Vamos analisar agora uma tabela contendo os dez primeiros números pares escritos de acordo com a Conjectura de Goldbach:

Tabela 3.1: Os dez primeiros pares da Conjectura de Goldbach

$2k$	$p_1 + p_2$
4	**2 + 2**
6	**3 + 3**
8	**3 + 5**
10	**5 + 5**
12	**5 + 7**
14	**7 + 7**
16	**5 + 11**
18	**7 + 11**
20	**7 + 13**
22	**5 + 17**

Fonte: Elaborado pelo autor

Note que, para os primeiros exemplos da Conjectura de Goldbach, fica fácil encontrar os números primos que satisfazem a condição, porém, para números cada vez maiores, fica cada vez mais difícil encontrar tais números.

Em abril de 2012, o matemático português Tomás Oliveira e Silva (1980 -) conseguiu provar a veracidade da Conjectura de Goldbach até o limite superior 4×10^{18}. Apesar de seu status de "problema não resolvido", a Conjectura de Goldbach continua a atrair interesse e esforços contínuos da comunidade matemática. Prêmios são oferecidos para quem conseguir provar a conjectura ou alcançar avanços significativos em sua resolução. Porém, embora a evolução dos resultados mostrar que é válido até um determinado valor máximo (limite superior), isso não prova que será válida para qualquer valor dado (SOUSA, 2013).

Com base nas informações fornecidas no site oficial do projeto *GIMPS* e para fins de análise temporal, elaboramos uma tabela para mostrar as principais evoluções de testes da Conjectura de Goldbach conforme o limite superior correspondente, ou seja, conforme o número máximo testado. Essa tabela nos fornece uma ideia da quantidade de tempo que foi necessário para conseguir tais avanços, nos mostrando o trabalho de diversos matemáticos que se empenharam para encontrar, de alguma forma, uma solução.

Tabela 3.2: Evolução dos testes da Conjectura de Goldbach

Limite superior	**Autor**	**Período**
1000	Georg Cantor	Século XIX
2000	A. Aubry	Século XIX
5000	R. Haussner	Século XIX
10^4	Desboves	Século XIX
10^5	Pipping	1938
10^8	Stein and Stein	1965
2×10^{10}	Granville	1989
4×10^{11}	Sinisalo	1993
10^{14}	Deshouillers e Saouter	1998
4×10^{14}	Richstein	1999
2×10^{16}	Oliveira e Silva	Março de 2003
6×10^{16}	Oliveira e Silva	Outubro de 2003
2×10^{17}	Oliveira e Silva	Fevereiro de 2005
3×10^{17}	Oliveira e Silva	Dezembro de 2005
12×10^{17}	Oliveira e Silva	Julho de 2008
15×10^{17}	Oliveira e Silva	Julho de 2009
16×10^{17}	Oliveira e Silva	Dezembro de 2009
2×10^{18}	Oliveira e Silva	Novembro de 2010
4×10^{18}	Oliveira e Silva	Abril de 2012

Fonte: Elaborado pelo autor

Alguns matemáticos dedicaram suas carreiras inteiras a tentar provar, de forma analítica, a Conjectura de Goldbach. Já outros, a usaram como ponto de partida para pesquisas e aplicações em outras áreas da Matemática, como é o exemplo do matemático chinês Terence Tao (1975 -), que em 2013 usou a Conjectura de Goldbach como ponto de partida para uma série de trabalhos em que ele desenvolveu novas ferramentas para estudar os números primos.

> Reparem no tesouro produzido pelas tentativas de demonstração da Conjectura de Goldbach, e vejam como é tão pouco significativa, comparativamente, a questão da descoberta do seu valor lógico absoluto! [...] Suponhamos que um dia alguém aparece com um contra-exemplo para a Conjectura de Goldbach, ou com uma demonstração de que existem números pares que não se podem representar como soma de dois primos. Será que isso tornaria falsas ou tiraria algum valor a todas as teorias magníficas, conceitos e técnicas que foram desenvolvidos para demonstrar a conjectura que estamos agora a supor que é incorreta? Nada disso! Uma demonstração da falsidade da Conjectura de Goldbach apenas serviria como catalisador de novos desenvolvimentos, sem nenhum efeito nos métodos desenvolvidos até aqui na tentativa de demonstrar a conjectura. Porque começaríamos imediatamente a colocar novas questões, como por exemplo acerca da quantidade de números pares “nãogoldbachianos”: serão em número finito? infinitos? [...] Novos tesouros viriam juntar-se aos primeiros, a par deles e não em vez deles - e é assim o percurso das demonstrações em Matemática! (VILLIERS, 2002, p. 1)

Da conjectura inicial, também chamada de "Conjectura Forte de Goldbach", deriva-se a "Conjectura Fraca de Goldbach". Tal variação da conjectura é enunciada por:

"Todo número ímpar maior do que 5 é igual à soma de três números primos."

Se a conjectura "forte" for demonstrada, a "fraca" é consequência, ou seja, uma vez provada a conjectura inicial (conjectura forte), a conjectura fraca também estará automaticamente provada. Vamos assumir inicialmente que a "conjectura forte" seja verdadeira, ou seja, de fato existem p_1 e p_2 números primos tais que $2k = p_1 + p_2$, para todo $k \geqslant 2$. Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} 2k &= p_1 + p_2 \\ 2k + 3 &= p_1 + p_2 + 3 \\ 2k + 2 + 1 &= p_1 + p_2 + 3 \\ 2 \cdot (k+1) + 1 &= p_1 + p_2 + 3 \\ 2n + 1 &= p_1 + p_2 + 3, n \geqslant 3. \end{aligned}$$

Realmente, fazendo uma pequena análise podemos constatar essa veracidade pelo menos para os dez primeiros números ímpares da "conjectura fraca", observe:

Tabela 3.3: Conjectura Fraca de Goldbach

$2n+1$	$p_1 + p_2 + 3$
7	**2 + 2 + 3**
9	**3 + 3 + 3**
11	**5 + 3 + 3**
13	**5 + 5 + 3**
15	**7 + 5 + 3**
17	**7 + 7 + 3**
19	**11 + 5 + 3**
21	**11 + 7 + 3**
23	**13 + 7 + 3**
25	**17 + 5 + 3**

Fonte: Elaborado pelo autor

Uma outra variação da Conjectura Fraca de Goldbach é que

"Todo número ímpar maior que 7 pode ser expresso como soma de três números primos ímpares".

Perceba que conjecturar que "todo número ímpar maior do que 5 é igual a soma de três números primos", é o mesmo que presumir que "todo número ímpar maior que 7 pode ser expresso como soma de três números primos ímpares”, já que, para este novo caso, não poderemos mais utilizar o número 2 na decomposição dos números, como por exemplo, $7 = 2 + 2 + 3$. Na Tabela 3.4, temos os dez primeiros números seguindo a variação da Conjectura Fraca de Goldbach.

Tabela 3.4: Variação da Conjectura Fraca de Goldbach

$2n+1$	$p_1 + p_2 + 3$
9	**3 + 3 + 3**
11	**5 + 3 + 3**
13	**5 + 5 + 3**
15	**7 + 5 + 3**
17	**7 + 7 + 3**
19	**11 + 5 + 3**
21	**11 + 7 + 3**
23	**13 + 7 + 3**
25	**17 + 5 + 3**
27	**19 + 5 + 3**

Fonte: Elaborado pelo autor

O problema da Conjectura de Goldbach se tornou tão famoso que foi retratado de forma cômica no livro *“Tio Petros e a Conjectura de Goldbach”*, do autor Doxiadis (2001). No livro, o sobrinho do personagem Petros Papachristos (Tio Petros) narra todos os percursos e acontecimentos do seu tio, que na juventude era um matemático brilhante e passou a vida toda tentando demonstrar a Conjectura de Goldbach. Em uma das frases marcantes do livro, Tio Petros diz:

“Na verdade, a constituição psicológica do verdadeiro matemático está mais próxima do poeta, ou do compositor musical, isso é, de alguém envolvido com a criação do belo, e com a busca da harmonia e da perfeição.”

O personagem nos traz uma reflexão sobre a essência do “ser matemático”, sobre a busca pela criação de algo inovador e surpreendente, algo tão belo quanto um quadro pintado por um grande artista, comparando então a Matemática como uma arte, e de fato, a Matemática tem sua própria beleza intrínseca. As equações e fórmulas que parecem abstratas à primeira vista, quando examinadas mais de perto, muitas vezes revelam padrões fascinantes e relações surpreendentes. Christian Goldbach foi um matemático e intelectual brilhante, com interesses em várias áreas além da Matemática. Sua conjectura continua a desafiar matemáticos até hoje e é um testemunho do poder e da beleza da Matemática.

3.2 Conjectura de Legendre

Pouco se sabe sobre a história de Adrien-Marie Legendre, porém, suas contribuições para a Matemática se tornaram extremamente importantes para aplicações práticas. Sabe-se que Legendre nasceu em Paris, no dia 18 de setembro de 1952 e faleceu também em Paris no dia 10 de janeiro de 1833, sendo um dos mais brilhantes matemáticos da França, trazendo grandes contribuições para diversos campos, incluindo a Teoria dos Números, a Análise Matemática e a Geometria.

Uma das suas contribuições mais conhecidas é a criação da “função elíptica”, uma generalização das funções trigonométricas que desempenham um papel fundamental na teoria das integrais elípticas. Ele também desenvolveu métodos para resolver equações diferenciais parciais e integrais, que foram amplamente utilizados na Física Matemática. Legendre mostrou que partindo de integrais do tipo

$$\int_c^x \frac{r(x)}{\sqrt{p(x)}}dx,$$

onde $r(x)$ é uma função racional, $p(x)$ é um polinômio de grau inteiro n $(3 \leq n \leq 4)$ com nenhuma raiz repetida e c uma constante, sendo $y = f(x)$, se obtém então 3 tipos funções de integrais elípticas, são essas:

Integral Elíptica de 1^a Classe

$$f_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 sen(t)}} \text{ , onde } 0 < k^2 < 1 \text{ ,}$$

Integral Elíptica de 2^a Classe

$$f_2(x) = \int_0^x \sqrt{1 - k^2 sen(t)}dt \text{ , onde } 0 < k^2 < 1 \text{ ,}$$

Integral Elíptica de 3^a Classe

$$f_3(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 sen(t)} \cdot (1 + a^2 sen^2(t))} \text{ , onde } a \neq 0,\ a^2 \neq k^2 \text{ .}$$

Além disso, Legendre é conhecido por ter dado uma das primeiras provas do Teorema Central do Limite, que afirma que a distribuição de médias amostrais de uma população qualquer se aproxima de uma distribuição normal, independentemente da forma da distribuição original. Na Teoria dos Números, assim como Gauss, Legendre também analisou uma fórmula para calcular o número de primos menores que um determinado valor, estudando as propriedades dos números primos em geral. Legendre então deduz que essa contagem dos números primos pode ser definida como

$$\pi(x) \simeq \int_2^x \frac{1}{log(t)} dt,$$

ou seja, partindo da mesma análise de Gauss, Legendre viu, de forma independente, que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\int_2^x \frac{1}{log(t)} dt} = 1.$$

Uma de suas obras mais conhecidas é o livro "Elementos de Geometria", publicado em 1794, que foi utilizado como um livro-texto padrão para estudantes de Geometria por muitos anos. Ele também escreveu um livro sobre cálculo de variações e contribuiu para a Matemática Aplicada, trabalhando em problemas de Astronomia e Geodésia. Adrien-Marie Legendre foi um matemático muito respeitado em sua época e seu trabalho teve uma grande influência no desenvolvimento da Matemática moderna.

Além da Geometria Diferencial, Legendre trouxe também importantes contribuições para o estudo do Cálculo Diferencial, desenvolvendo então o que posteriormente ficou conhecido como a "equação diferencial de Legendre", que pode ser definida por

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0,$$

onde y é a função desconhecida, n é um parâmetro inteiro ou real e y' e y'' denotam, respectivamente, a primeira e a segunda derivada da função y em relação a x. Esta equação é de grande importância na Física Teórica, especialmente na Mecânica Quântica e na Teoria Eletromagnética, pois ela descreve o comportamento de certas quantidades físicas em sistemas com simetria esférica, como átomos e moléculas.

A Função de Legendre tem muitas aplicações na Matemática e na Física. Por exemplo, ela é usada na expansão de funções em séries de potências, na solução de problemas de valor de contorno em Eletrostática e na descrição dos movimentos orbitais em Física Celeste. Além disso, a Função de Legendre é fundamental na teoria de harmônicos esféricos, que é usada na descrição de fenômenos em Física, como a emissão de radiação por átomos e moléculas, além das aplicações na descrição dos estados de energia em sistemas quânticos, na análise de propriedades dos campos elétricos e magnéticos, e na teoria dos harmônicos esféricos (RAMOS, 2010).

Outra contribuição extremamente importante, é a decomposição de números fatoriais em fatores primos, que ficou conhecido como *Teorema de Legendre*, onde ele afirma que:

Qualquer que seja o inteiro positivo n, o expoente do número primo p na decomposição em números primos de $n!$ é igual a

$$\sum_{i\geq 1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \text{, para } n \geq p^i.$$

Para a nossa análise, a notação $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ indica que estamos utilizando apenas a parte inteira ao fazermos a divisão de n por p^i.

Esse Teorema nos ajuda a resolver problemas do tipo

"Qual o maior valor de n para que 320! seja divisível por 7^n?"

Lembre-se que $320! = 320 \cdot 319 \cdot 318 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Para resolver esse problema, iremos utilizar o *Teorema de Legendre.* Para isso, temos que

$$320! = 7^n \cdot k, k \in \mathbb{N}.$$

Então, temos $n = 320$ e $p = 7$. Note que $7^3 > 320$, então utilizaremos até 7^2. Faremos

$$\begin{aligned} n &= \left\lfloor \frac{320}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{320}{7^2} \right\rfloor \\ n &= \left\lfloor \frac{320}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{320}{49} \right\rfloor \\ n &= 45 + 6 \\ n &= 51. \end{aligned}$$

Portanto, o maior valor de n para que 7^n divida 320! é $n = 51$.

Apesar de suas contribuições para o avanço da Matemática Moderna, talvez Legendre tenha ficado mais conhecido por uma conjectura que leva o seu nome, a *"Conjectura de Legendre"*, que foi proposta por ele em 1798.

Conjectura 3.2. *Existe pelo menos um número primo entre os quadrados consecutivos de números inteiros.*

De forma analítica, temos que para qualquer número inteiro positivo n, existe pelo menos um número primo p tal que:

$$n^2 < p < (n+1)^2.$$

Por exemplo, para $n = 1$, a conjectura afirma que sempre existe pelo menos um número primo entre os quadrados 1 e 4, o que é verdadeiro, pois o número 2 e o número 3 são números primos nessa faixa. Sendo considerada uma das grandes questões abertas da Teoria dos Números, este problema tem sido objeto de intensa pesquisa ao longo dos séculos.

Para entender mais detalhadamente esse padrão numérico, vamos analisar a tabela a seguir.

Tabela 3.5: Os dez primeiros números da Conjectura de Legendre

n	n^2	p	$(n+1)^2$
1	**1**	**2, 3**	**4**
2	**4**	**5, 7**	**9**
3	**9**	**11, 13**	**16**
4	**16**	**17, 19, 23**	**25**
5	**25**	**29, 31**	**36**
6	**36**	**37, 41, 43, 47**	**49**
7	**49**	**53, 59, 61**	**64**
8	**64**	**67, 71, 73, 79**	**81**
9	**81**	**83, 89, 97**	**100**
10	**100**	**101, 103, 107, 109, 113**	**121**

Fonte: Elaborado pelo autor

Note que, até $n = 10$, temos pelo menos um número primo compreendido entre n^2 e $(n+1)^2$. A conjectura foi testada computacionalmente para elevados valores de n, e para todos eles, foi verificada verdadeira. No entanto, a prova dessa conjectura continua sendo um problema em aberto na Matemática. Muitos matemáticos tentaram demonstrar tal conjectura, porém, existem apenas resultados parciais. Um dos feitos mais importantes é o trabalho de Jing Run Chen (1933 - 1996), matemático chinês que provou existir entre n^2 e $(n+1)^2$ um número p que é primo ou semiprimo (semiprimos são números compostos formados pelo produto de dois números primos, não necessariamente distintos). O resultado de Chen trouxe grandes avanços para a análise da Conjectura de Legendre, pois agora, se tem um resultado (mesmo que parcial) mais preciso e consistente. (ASSIS, 2019).

A Conjectura de Legendre também se associa a outras conjecutras, no mínimo, curiosas, como o postulado de Bertrand, desenvolvida pelo matemático francês Bertrand Russell (1822 - 1900), que afirma que sempre existe um número primo entre n e $2n$ para qualquer número inteiro positivo n, que pode ser interpretada como uma variação da Conjectura de Legendre. Outro exemplo é o teorema dos números primos de Dirichlet, analisada pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), que estabelece que, se $d \geq 2$ e $a \neq 0$ são números inteiros primos entre si, ou seja, o $mdc(a, d) = 1$, então a progressão aritmética $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots,$ contém uma infinidade de números primos. Todos esses trabalhos desenvolvidos possuem como base os estudos de Legendre.

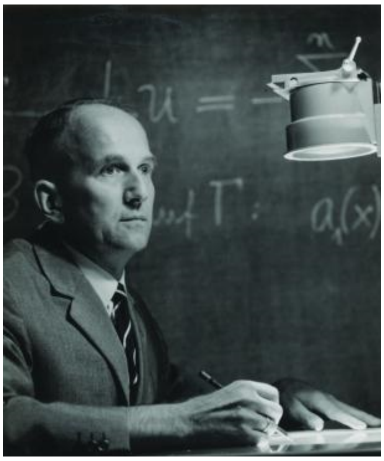
A busca pela prova da conjectura tem levado ao desenvolvimento de novas técnicas e ideias matemáticas, e tem sido um estímulo para a pesquisa na Teoria dos Números e em áreas relacionadas. Perceba a importância de todos os brilhantes trabalhos de Legendre, um matemático a frente da sua época, trazendo importantes avanços para a Matemática Moderna, como estudos sobre Geometria Diferencial, Cálculo Diferencial e Algebra.

3.3 Conjectura de Collatz

Alemanha, 6 de Julho de 1910, na cidade de Arnsberg, nascia Lothar Collatz. Assim como muitos estudantes alemães da sua época, Collatz estudou em várias universidades, entre elas, a Universidade de Berlim, Munique, Universidade de Greifswald e Universidade de Göttingen, se dedicando à Matemática e Física durante o período de 1928 a 1933. Ele teve professores aclamados pela comunidade científica da época, como o famoso matemático alemão David Hilbert (1862 - 1943) e o físico austríaco Erwin Schrödinger (1887 - 1961).

As contribuições de Lothar Collatz para a Matemática e a Ciência da Computação foram muito importantes, e muitas delas ainda influenciam pesquisas e estudos atuais. A investigação de Collatz permitiu que ele fosse um dos pioneiros no uso de computadores para solucionar problemas matemáticos avançados e complexos. Seu trabalho ajudou a estabelecer as bases para a aplicação de técnicas computacionais na Matemática e em outras áreas científicas.

Figura 11: Lothar Collatz



Fonte: <https://people.math.sc.edu/>

Collatz também se dedicou aos estudos de Sistemas Dinâmicos, onde sua pesquisa tem sido aplicada em uma ampla variedade de áreas, como Criptografia, Teoria da Informação, Modelagem Matemática, Biologia e Ecologia. Seu trabalho em aproximação de funções e equações diferenciais parciais também tem sido fundamental para o desenvolvimento de métodos numéricos utilizados em diversas áreas da Ciência e da Engenharia. Ele também teve uma carreira acadêmica notável, tendo lecionado em diversas universidades alemãs, entre elas a Universidade de Hamburgo, onde atuou como professor de Matemática Aplicada. Collatz era conhecido como um professor talentoso e dedicado, que inspirou muitos estudantes a seguirem carreiras em Matemática e Ciência da Computação (ONODY, 2021).

Dentre os trabalhos de Collatz, existe uma análise na Teoria dos Números que o fez adquirir destaque na comunidade matemática. Uma conjectura proposta em 1937 que leva o seu nome, a *Conjectura de Collatz*. Essa conjectura pode ser enunciada como:

Conjectura 3.3. *A partir de qualquer número inteiro positivo n, dividindo-o por 2, se for par, ou multiplicando-o por 3 e adicionando 1, se for ímpar, e fazendo assim sucessivamente, chegaremos sempre ao número 1.*

Iremos verificar essa conjectura testando para alguns valores e realizando as iterações seguindo o algoritmo mencionado acima, e para esse primeiro exemplo, usaremos como ponto de partida $n = 10$. Então teremos:

Tabela 3.6: Conjectura de Collatz para $n = 10$

Iteração	**Operação**	**Resultado**
1^a	$\frac{10}{2}$	5
2^a	$3 \cdot 5 + 1$	16
3^a	$\frac{16}{2}$	8
4^a	$\frac{8}{2}$	4
5^a	$\frac{4}{2}$	2
6^a	$\frac{2}{2}$	1

Fonte: Elaborado pelo autor

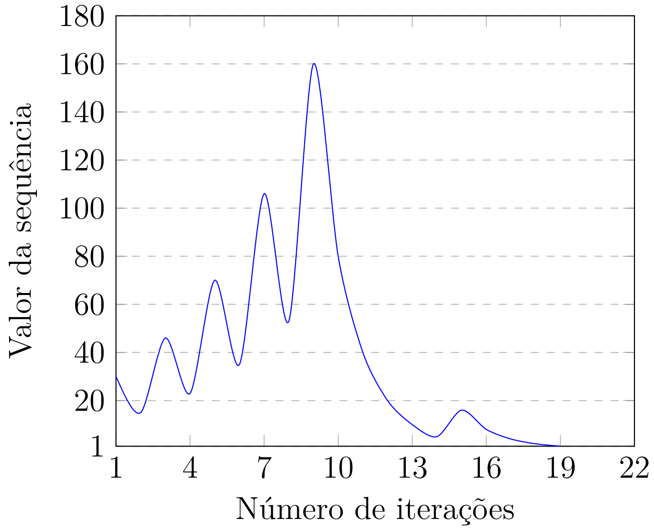
Perceba que começando de $n = 10$, chegamos em 1 em 6 iterações, tendo a seguinte sequência: $10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$. Note que a conjectura é simples de ser enunciada e testada, porém, até então ela não foi demonstrada verdadeira ou refutada. De acordo com o site MIT Technology Review (2021), até o momento, a conjectura foi testada por computadores para todos os valores iniciais até 3×10^7, com cada número dos testes, o resultado terminou em 1, ou seja, a conjectura foi verificada verdadeira com n variando até 30 milhões.

De forma analítica, também podemos escrever essa conjectura como uma função:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & , \quad \text{se } n \text{ for par.} \\ 3 \cdot n + 1 & , \quad \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Partiremos da função analítica para plotar o gráfico seguinte utilizando como parâmetro de ponto de partida $n = 60$.

Figura 12: Conjectura de Collatz para $n = 60$

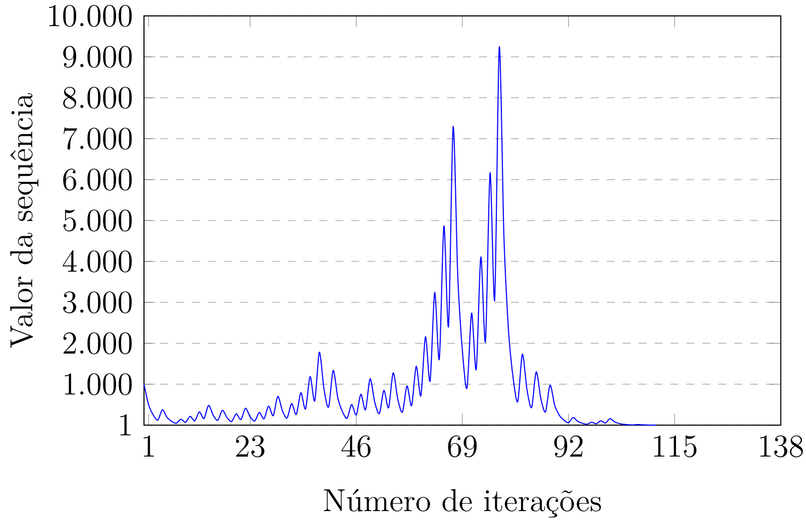


Fonte: Elaborado pelo autor

Note que, graficamente, para $n = 60$, a curva chega no ponto máximo 160 e decresce até 1, com 19 iterações. De fato, se escrevermos todos os números da sequência teremos: 60, 30, 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Perceba que o maior valor encontrado é 160 e temos 19 números após o primeiro número (ponto de partida), sendo essa quantidade o número de iterações.

Para números maiores, mesmo utilizando o recurso gráfico, fica cada vez mais difícil determinar a sequência das iterações e a quantidade de iterações. Para exemplificar, vejamos o seguinte gráfico para $n = 1.000$.

Figura 13: Conjectura de Collatz para $n = 1.000$



Fonte: Elaborado pelo autor

Perceba que, para $n = 1.000$, fica difícil determinar com precisão os valores numéricos da sequência e a quantidade de iterações, até mesmo no gráfico. Note também que a curva não é definida por um padrão específico, sendo aleatória a distribuição dos números. Essa aleatoriedade na conjectura e da distribuição dos pontos no gráfico também é chamada de *efeito granizo*, pela associação com o modo imprevisível que o granizo cai das nuvens.

Collatz era um grande defensor do poder computacional para resolver problemas complexos de Matemática em uma época em que a Computação ainda estava dando os primeiros passos. Afim de defender a ideia de Collatz do poder computacional, desenvolvemos a seguir um programa utilizando *Python*, uma linguagem de programação simples e extretamente poderosa. Nossa aplicação desenvolvida será capaz de nos fornecer todos os valores da sequência e a quantidade de iterações partindo de um determinado valor n dado. O nosso código ficará da seguinte forma:

Figura 14: Conjectura de Collatz em *Python*

```
1  while 1==1:
2      n=int(input("Digite um número inteiro positivo para começar novas
       iterações: "))
3      print("Os valores das iterações são: ")
4      def collatz(n):
5          count = 0
6          while n != 1:
7              print(n, end=" ")
8              if n % 2 == 0:
9                  n = n // 2
10             else:
11                 n = 3 * n + 1
12             count += 1
13         print(n)
14         print("Quantidade de iterações: ", count)
15     collatz(n)
```

Fonte: Elaborado pelo autor

Vamos entender cada linha de código:

1ª linha:

```
while 1 == 1:
```

O código começa com um loop (repetição) *while* infinito que executa continuamente enquanto a condição especificada for verdadeira. No nosso exemplo, temos *"enquanto 1 for igual a 1, faça o comando abaixo:"*. Como 1 é sempre igual a 1, o código irá se repetir inifinitamente, portanto, o loop nunca terminará a menos que seja interrompido manualmente. Essa parte serve apenas para que, após o código ser executado, todo o procedimento se repita e seja perguntado novamente um valor para novas iterações, fazendo com que o programa seja sempre executado.

2ª linha:

```
n=int(input("Digite um número inteiro positivo para começar novas
   iterações: "))
```

Como a Conjectura de Collatz é válida apenas para números inteiros positivos, o programa solicita ao usuário que digite um número inteiro positivo n para iniciar novas iterações. O número é lido da entrada do usuário usando a função *input()*, convertido em um inteiro usando a função *int()* e atribuído à variável n.

3ª linha:

```
print("Os valores das iterações são: ")
```

O programa "printa" (imprime) uma mensagem na tela para indicar que os valores das iterações serão exibidos a seguir.

4ª linha:

```
def collatz(n):
```

O programa define uma nova função chamada *collatz* que recebe o número inteiro n.

5ª linha:

```
count = 0
```

A variável *"count"* é inicializada como zero para contabilizar o número de iterações necessárias para alcançar o valor 1 na sequência de *Collatz*.

6ª linha:

```
while n != 1:
```

Um loop *while* é iniciado e continuará enquanto o valor n for diferente de 1, o que indica que a sequência de *Collatz* ainda não chegou ao fim.

7ª linha

```
print(n, end=" ")
```

O valor atual de n é impresso na tela, seguido de um espaço em branco, para mostrar o progresso da sequência da sequência da Conjecutra de Collatz de acordo com o número inteiro positivo digitado pelo usuário.

8ª a 11ª linha:

```
if n % 2 == 0:
    n = n // 2
else :
    n = 3 * n + 1
```

O programa verifica se o valor atual de n é par ou ímpar, ou seja, ele analisa se o resto da divisão do número n por 2 é igual a zero. Se *(if)* n for par, o valor é dividido por 2. Se não *(else)*, ou seja, se n for ímpar, o valor é multiplicado por 3 e adicionado 1. Este processo é repetido até que o valor 1 seja alcançado.

12ª linha:

```
count += 1
```

Temos um contador *count* que é acrescido em "1" para cada iteração do *loop while*, para registrar o número total de iterações necessárias até alcançar o valor 1 na sequência de *Collatz*.

13ª linha:

```
print(n)
```

Quando o valor "1" é finalmente alcançado pelos comandos anteriores, a sequência de *Collatz* é impressa na tela.

14ª linha:

```
print("Quantidade de iterações: ", count)
```

Nesse comando, programa imprime o número total de iterações realizadas para alcançar o valor 1 na sequência de *Collatz*. Este valor é armazenado na variável *count* e foi atualizado em cada iteração do loop *while*.

15ª linha:

```
collatz(n)
```

Finalmente, o programa chama a função *collatz(n)* com o argumento n para iniciar a execução da sequência de Collatz com o valor fornecido pelo usuário. Esse último garante que toda a função será executada realizando todos os passos. Como inicialmente temos um loop infinito *while*, o programa continuará executando até ser interrompido manualmente.

Podemos verificar o programa através de um computador de mesa ou até mesmo um celular, basta acessar um compilador de *Python* online, trazemos como exemplos alguns compiladores virtuais como o site <https://www.onlinegdb.com/online_python_compiler>, ou o site <https://www.programiz.com/python-programming/online-compiler/>, que são os melhores compiladores online. Após acessar qualquer um dos sites mencionados, basta inserir o nosso código para verificar a sua execução.

Para facilitar ao leitor, inserimos o nosso código no seguinte link: <https://onlinegdb.com/_UxEAFG9T>. Basta acessar e clicar em *Run*.

Ao exercutar o nosso código, o programa irá solicitar um número inteiro para começarmos as iterações, como mostra abaixo:

```
Digite um número para começar novas iterações:
```

Se escolhermos, por exemplo, um valor inicial igual a 500, o programa irá nos retornar o seguinte resultado:

```
Digite um número para começar novas iterações: 500
Os valores das iterações são:
500 250 125 376 188 94 47 142 71 214 107 322 161 484 242 121 364 182 91
    274 137 412 206 103 310 155 466 233 700 350 175 526 263 790 395 1186
    593 1780 890 445 1336 668 334 167 502 251 754 377 1132 566 283 850
    425 1276 638 319 958 479 1438 719 2158 1079 3238 1619 4858 2429 7288
    3644 1822 911 2734 1367 4102 2051 6154 3077 9232 4616 2308 1154 577
    1732 866 433 1300 650 325 976 488 244 122 61 184 92 46 23 70 35 106
    53 160 80 40 20 10 5 16 8 4 2 1
Quantidade de iterações:  110
```

Perceba que apenas em quatro linhas do terminal, o programa é capaz de nos fornecer todas as iterações em ordem de acordo com o valor inicial dado. Além disso, também é fornecido a quantidade total de iterações, conforme havíamos definido anteriormente na escrita *(script)* do nosso código. A ideia em fornecer todo o algoritmo em *Python*, é aguçar a curiosidade do leitor para que ele também possa verificar a *Conjectura de Collatz*, testando para os mais variados valores. Um obstáculo que pode limitar o código é o poder computacional no qual ele está sendo executado. Para computadores mais potentes, o código poderá calcular números altos com maior velocidade; para computadores mais fracos, o tempo de execução poderá ser maior.

A *Conjectura de Collatz* é impressionante por envolver operações aritméticas simples e, ao mesmo tempo, possuir uma complexidade enorme para as tentativas de demonstrações. Collatz foi um matemático brilhante, grande defensor do poder dos computadores para a resolução de problemas matemáticos complexos, em uma época em que a Computação ainda dava seus primeiros passos. Ele faleceu em 26 de setembro de 1990 em Hamburgo, na Alemanha, porém, sua vida e carreira continuam sendo exemplos do papel fundamental da Matemática e da Ciência da Computação para o avanço da tecnologia e da sociedade em geral. A contribuição de Collatz para a Matemática é amplamente reconhecida e continua a ser estudada por matemáticos e cientistas da computação em todo o mundo.

Capítulo 4

Outros Problemas em Aberto na Teoria dos Números

Veremos agora alguns problemas em aberto que não envolvem diretamente os números primos. Para essa nova análise, abordaremos alguns problemas que estão relacionados com o conceito de divisibilidade, para isso, precisaremos de algumas definições importantes que utilizaremos, como o conceito de *Mínimo Múltiplo Comum*, *Máximo Divisor Comum* e a ideia dos divisores próprios de um número inteiro.

Definição 4.1. *O Mínimo Múltiplo Comum (mmc) de dois inteiros positivos a e b é o menor inteiro positivo que é divisível por a e b. Denotaremos por mmc(a,b).*

Como exemplo, temos que o *mmc* de 6 e 10 é 30, pois esse é o menor múltiplo comum a estes números.

Definição 4.2. *O Máximo Divisor Comum (mdc) de dois inteiros positivos a e b (a ou b diferente de zero) é o maior inteiro que divide a e b. Denotaremos por mdc(a,b).*

Como exemplo, temos que o *mdc* de 6 e 10 é 2, pois esse é o maior divisor comum comum a estes números.

Definição 4.3. *Sendo k um número inteiro e $D(k)$ seus divisores positivos, denotamos $D_p(k)$ como seus divisores prórios, onde $D_p(k) = \{D(k) - k\}$.*

Como exemplo, temos que os divisores próprios de 6 pode ser representado como $D_p(6) = \{1, 2, 3\}$.

Definição 4.4. *Sendo n um número inteiro positivo, temos $S_d(n)$ como sendo a soma dos divisores de n e $S_{dp}(n)$ como sendo a soma dos divisores próprios de n.*

Como exemplo, temos que $S_d(6) = 12$ e que $S_{dp}(6) = 6$.

4.1 Números Perfeitos

A história dos números perfeitos começa há mais de 2000 anos, na Grécia Antiga. Matemáticos gregos, incluindo Euclides (383 a.C. - 323 a.C.) e Nicômaco de Gérasa, conhecido como Nicomachus (60 d.C. - 120 d.C.), estavam interessados em estudar a natureza dos números e, em particular, encontrar números especiais que tivessem propriedades únicas.

Um dos primeiros números que chamaram a atenção dos matemáticos gregos foi o número 6. Eles descobriram que 6 é a soma dos seus divisores próprios (1, 2 e 3), e que essa propriedade é compartilhada por outros números, como 28 ($D_p(28) = \{1, 2, 4, 7, 14\}$) e 496 ($D_p(496) = \{1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248\}$). Números que obedecem essa condição são chamados de *números perfeitos*.

Definição 4.5. *Seja n um número inteiro positivo e $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ seus divisores próprios, então temos que n será um número perfeito quando*

$$n = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Um fato curioso é que, até o momento, todos os números perfeitos descobertos são pares, ou seja, sendo n um número perfeito, temos que $S_{dp}(n) = 2k, k \in \mathbb{Z}_+$. Por enquanto, nada se sabe sobre a existência de números perfeitos ímpares (CRUZ et al., 2013).

No século XVI, o matemático alemão Michael Stifel (1487 - 1567) foi o primeiro a utilizar o termo "número perfeito" em sua obra "Arithmetica Integra", publicada em 1544. Nos séculos XVII e XVIII, o estudo dos números perfeitos foi expandido pelos matemáticos europeus, incluindo Fermat, Euler e Legendre, matemáticos já mencionados nesse trabalho. Em particular, Euler descobriu uma fórmula para gerar números perfeitos a partir de números primos, conhecida como a fórmula de Euler para números perfeitos.

Euler provou que, todo número perfeito par pode ser escrito como

$$\left(2^{p-1}\right) \cdot \left(2^p - 1\right),$$

Para algum p primo. Essa fórmula permite encontrar facilmente os quatro primeiros números perfeitos: 6, 28, 496 e 8.128. De fato, para os números mencionados, podemos verificar esse padrão conforme a tabela abaixo.

Tabela 4.1: Números Perfeitos na forma $(2^{p-1}) \cdot (2^p - 1)$

Número Perfeito	$\mathbf{(2^{p-1}) \cdot (2^p - 1)}$
6	$(2^{2-1}) \cdot (2^2 - 1)$
28	$(2^{3-1}) \cdot (2^3 - 1)$
496	$(2^{5-1}) \cdot (2^5 - 1)$
8.128	$(2^{7-1}) \cdot (2^7 - 1)$

Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando a tabela, é comum pensarmos que temos uma ordem crescente dos números primos p, e com isso, deduzirmos que o próximo número perfeito seria $(2^{11-1}) \cdot (2^{11} - 1)$. Porém, isso não é verdade, pois o próximo número perfeito da tabela é escrito com $p = 13$, sendo esse, $33.550.336 = (2^{13-1}) \cdot (2^{13} - 1)$. Uma curiosidade é que, os números perfeitos são tão particulares que os números tabelados acima são todos os números perfeitos menores que 10^5.

Um padrão descoberto por Leonhard Euler é que, se $2^p - 1$ é um número primo, então $(2^{p-1}) \cdot (2^p - 1)$ é um número perfeito. Porém, note que se $2^p - 1$ é um número primo, então esse é um Número Primo de Mersenne, o que torna os números perfeitos ainda mais interessantes, já que relaciona características de outros números específicos, como os Primos de Mersenne, estudados anteriormente.

Essa relação é fascinante, pois permite gerar números perfeitos conhecendo apenas os Primos de Mersenne correspondentes. Por exemplo, se encontrarmos um novo Primo de Mersenne, podemos aplicar a fórmula de Euler para obter um novo Número Perfeito. Essa relação tem sido explorada ao longo dos séculos na busca por números perfeitos e primos de Mersenne.

Com o avanço da computação moderna, foi possível encontrar números perfeitos ainda maiores. O maior número perfeito foi descoberto em dezembro de 2018, através do projeto colaborativo *GIMPS* (já mencionado anteriormente). O número possui um total de 24.862.048 dígitos e pode ser gerado pela fórmula de Euler, sendo escrito como $(2^{82.589.933-1}) \cdot (2^{82.589.933} - 1)$, sendo o número primo $p = 82.589.933$.

Dentre outras contribuições, uma interessante é do matemático francês Anatole Lucas (1842 - 1891), mais conhecido como Édouard Lucas, o mesmo criador do jogo da *Torre de Hanói*, que em 1876 mostrou que os números perfeitos pares terminam sempre em 6 ou 8. Ele também calculou, de forma manual, o número $2^{127} - 1$, verifcando ser um número primo, com isso, foi determinando então o maior número perfeito conhecido da época: $(2^{127-1}) \cdot (2^{127} - 1)$. O que é extremamente impressionante, tendo em vista o tamanho do número que foi calculado manualmente.

Os números perfeitos são considerados raros. Embora tenham sido feitos avanços significativos na descoberta de números perfeitos usando técnicas computacionais, até agora, apenas 51 números perfeitos foram descobertos. Os maiores números perfeitos conhecidos têm milhões de dígitos.

Apesar da natureza dos números perfeitos ter sido estudada por séculos, muitos mistérios ainda permanecem: ainda não se sabe se existem infinitos números perfeitos ou se existem números perfeitos ímpares, o que tornam problemas em aberto. Portanto, o estudo desses números continua a ser uma área de interesse para matemáticos e cientistas de todo o mundo, e a descoberta de novos números perfeitos ainda é um desafio emocionante para a comunidade matemática.

4.2 Números Amigos

A origem dos números amigos remontam à antiguidade. Acredita-se que os antigos egípcios já conheciam a existência desses números, embora não tivessem uma formulação explícita para eles. Eles estavam interessados em encontrar números perfeitos, que são números cuja soma dos divisores próprios é igual ao próprio número. Os números amigos podem ser considerados uma extensão dos números perfeitos (ALLAN, 2009).

Definição 4.6. *Dados dois números inteiros a e b, esses formarão um par de números amigos (a, b) quando $S_{dp}(a) = b$ e $S_{dp}(b) = a$.*

Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.), famoso filósofo grego, mencionou os números amigos em seus escritos. No entanto, foi apenas no século IX que o matemático árabe Al-Farabi (870 d.C. - 950 d.C.) forneceu os primeiros estudos mais detalhados. Ele investigou tais números e descobriu o primeiro par de números amigos: (220, 284).

Tabela 4.2: Os cinco primeiros pares de números amigos

(220, 284)
(1.184, 1.210)
(2.620, 2.924)
(5.020, 5.564)
(6.232, 6.368)

Fonte: Elaborado pelo autor

De fato, note que temos

Para o primeiro par:

$S_{dp}(220) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$

$S_{dp}(284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$

Para o segundo par:

$S_{dp}(1.184) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1.210.$

$S_{dp}(1.210) = 1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1.184.$

Para o terceiro par:

$S_{dp}(2.620) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 131 + 262 + 524 + 655 + 1310 = 2924.$

$S_{dp}(2.924) = 1 + 2 + 4 + 17 + 34 + 43 + 68 + 86 + 172 + 731 + 1.462 = 2.620.$

Para o quarto par:

$S_{dp}(5.020) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 251 + 502 + 1.004 + 1.255 + 2.510 = 5.564.$

$S_{dp}(5.564) = 1 + 2 + 4 + 13 + 26 + 52 + 107 + 214 + 428 + 1.391 + 2.782 = 5.020.$

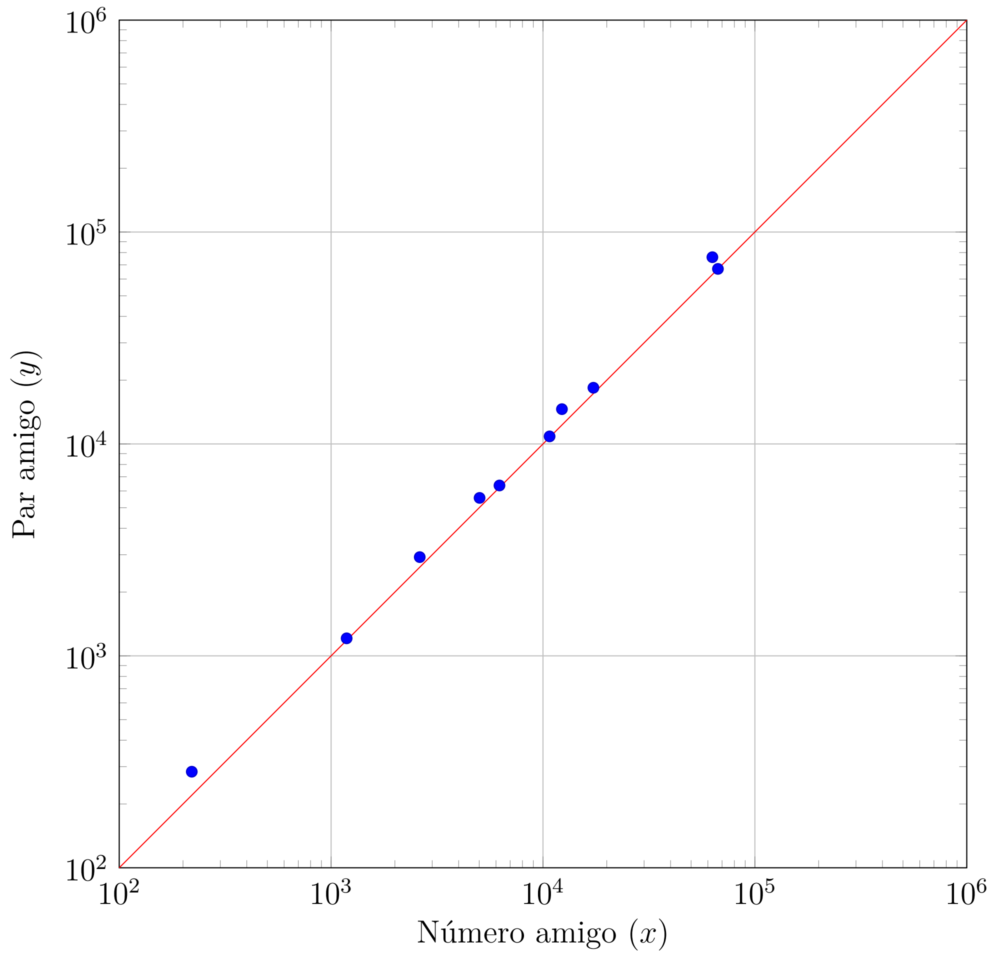
Para o quinto par:

$S_{dp}(6.232) = 1+2+4+8+19+38+41+76+82+152+164+328+779+1.558+3.116 = 6.368.$

$S_{dp}(6.368) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 199 + 398 + 796 + 1.592 + 3.184 = 6232.$

Vamos analisar agora o comportamento da distribuição dos dez primeiros pares de Números Amigos em um gráfico.

Figura 15: Gráfico dos dez primeiros pares de Números Amigos



Fonte: Elaborado pelo autor

No plano cartesiano, cada ponto é um par de número amigo, o eixo x representa o número amigo e o eixo y representa o seu par amigo. O critério de ordenação nesse plano cartesiano está relacionado ao par (x, y), onde ordenamos cada par com $x > y$, o mesmo padrão de ordenação está em nosso apêndice sobre os pares de Números Amigos. Observe que os pontos estão proximos da reta representada pela função identidade $f(x) = x$ (em vermelho), porém, não se sabe se essa característica é um padrão para os demais pares de números de amigos. O que se sabe é que os próximos são pares ordenados cada vez maiores. Embora muitos pares de números amigos tenham sido encontrados, ainda há desafios abertos na busca por novos pares. Encontrar pares de ordens ainda maiores ou desenvolver métodos mais eficientes são áreas de pesquisa em andamento.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

O presente trabalho visa trazer uma análise aprofundada sobre a Teoria dos Números, em particular, sobre Problemas em Aberto. Trazendo contextos históricos, definições e teoremas, temos como intuito estimular o leitor a se debruçar na linha do tempo da Matemática a fim de compreender sua evolução ao longo da história, utilizando como análise os seus Problemas em Aberto. A Teoria dos Números é um campo vasto e fascinante, repleto de Problemas em Aberto que têm desafiado matemáticos ao longo dos séculos. Entre esses problemas, destacam-se os Primos de Mersenne, primos gêmeos, a Conjectura de Goldbach, a Conjectura de Legendre, a Conjectura de Collatz, Números Perfeitos e Números Amigos, problemas esses que foram detalhados neste trabalho. Cada um desses tópicos apresenta características únicas e desafios matemáticos intrigantes.

A busca por soluções e provas teóricas nesses tópicos impulsiona a pesquisa Matemática e alimenta a nossa compreensão dos números e suas propriedades. À medida que avançamos no campo da Teoria dos Números, novas descobertas são feitas e novos desafios surgem, garantindo que essa área da Matemática permaneça emocionante e cheia de possibilidades para os matemáticos do presente e do futuro. Com o intuito de ajudar os avanços nessa área específica, colaborando no desenvolvimento de pesquisas futuras, este trabalho trouxe uma atualização de alguns dos princiapais problemas em aberto na Teoria dos Número, bem como das pesquisas que estão sendo realizadas na tentativa de demonstrá-los.

Embora muitos avanços tenham sido feitos e conjecturas empíricas sustentadas, esses problemas ainda resistem a soluções definitivas. Eles nos lembram da complexidade e profundidade dos números e nos incentivam a continuar explorando, pesquisando e desvendando os mistérios matemáticos que permeiam esses tópicos. A Teoria dos Números continua sendo um campo estimulante, repleto de enigmas a serem resolvidos, e a busca por respostas para esses problemas em aberto permanece como um desafio constante.

Referências

ALLAN, N. D. A Matemática Recreativa de Euler: Números Amigos. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 2009.

ALVITES, J. C. V. *Hipótese de Riemann e Física*. Universidade de São Paulo, 2012.

ASSIS, D. I. *Os números primos como instrumento de estímulo à curiosidade dos estudantes*. Brasília - Distrito Federal, 2019.

BICUDO, I. *Euclides: Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo*. 1. ed. São Paulo - Brasil: Unesp, 2009.

CHAVES, M. S. et al. *A linguagem dos números primos: uma abordagem epistemológica sobre a Conjectura de Goldbach. Cuadernos de Educación y Desarrollo*, Servicios Académicos Intercontinentales SL, n. 45, 2014.

CRUZ, S. O. et al. *Números Perfeitos*. Universidade Federal da Paraíba, 2013.

D'AMBROSIO. *Euler, um matemático multifacetado*. 1. ed. São Paulo - Brasil: Revista Brasileira de História da Matemática, 2009.

DOXIADIS, A. *Tio Petros e a Conjectura de Goldbach*. São Paulo - Brasil: Editora 34, 2001.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino Domingues*. 2. ed. Campinas - Brasil: UNICAMP, 1997.

FILHO, D. C. de M. *Um convite à Matemática*. SBM, Rio de Janeiro - Brasil, 2013.

MATTOS, P. de C. *Tipos de Revisão de Literatura*. São Paulo - Brasil: UNESP, 2015.

MIT Technology Review. *Os computadores estão prontos para resolver esse problema matemático notoriamente complicado?* 2021. Disponível em: <https://mittechreview.com.br/>. Acesso em: 11 de maio de 2023.

MOREIRA, C. G.; MARTÍNEZ, F. E. B. *Primos Gêmeos, Primos de Sophie Germain e o Teorema de Brun. Revista Matemática Universitária*, 2010.

ONODY, R. N. *A Conjectura de Collatz*. Instituto de Física de São Carlos - USP, São Paulo - SP, 2021.

PERUZZO, J. *O Fascínio Dos Números Primos*. Joinville - Santa Catarina: Clube de Autores, 2017.

RAMOS, M. A. R. *Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e suas obras em Teoria dos Números*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal - RN, 2010.

REIS, L. F. de S. *Algumas conexões entre Teoria dos Números e Física*. 2021.

SANTOS, J. P. de O. *Introdução à Teoria dos Números*. 3. ed. Rio de Janeiro - Brasil: SBM, 2009.

SOUSA, J. E. *Conjetura de Goldbach: uma visão aritmética*. Tese (Doutorado) — Universidade dos Açores (Portugal), 2013.

STEWART, I. *Os Maiores Problemas Matemáticos de Todos os Tempos. Tradução: George Schlesinger*. 1. ed. Rio de Janeiro - Brasil: Zahar, 2014.

USP (Universidade de São Paulo). *Uso de supercomputadores é tema de evento da Superintendência de Tecnologia da Informação*. 2021. Disponível em: <https://www.usp.br/aunantigo/exibir?id=4980&ed=879>. Acesso em: 11 de maio de 2023.

VILLIERS, M. *Para uma Compreensão dos Diferentes Papéis da Demonstração em Geometria Dinâmica*. University of Durban-Westville, 2002.

Apêndice A

Representação dos Primos de Mersenne menores que 10^{100}

$M_2 = 2^2 - 1 = 3.$

$M_3 = 2^3 - 1 = 7.$

$M_5 = 2^5 - 1 = 31.$

$M_7 = 2^7 - 1 = 127.$

$M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191.$

$M_{17} = 2^{17} - 1 = 131071.$

$M_{19} = 2^{19} - 1 = 524287.$

$M_{31} = 2^{31} - 1 = 2147483647.$

$M_{61} = 2^{61} - 1 = 2305843009213693951.$

$M_{89} = 2^{89} - 1 = 618970019642690137449562111.$

$M_{107} = 2^{107} - 1 = 162259276829213363391578010288127.$

$M_{127} = 2^{127} - 1 = 170141183460469231731687303715884105727.$

Apêndice B

Representação dos pares de Primos Gêmeos menores que 10.000

$(3,5)$	$(569,571)$	$(1607,1609)$	$(2687,2689)$
$(5,7)$	$(599,601)$	$(1619,1621)$	$(2711,2713)$
$(11,13)$	$(617,619)$	$(1667,1669)$	$(2729,2731)$
$(17,19)$	$(641,643)$	$(1697,1699)$	$(2789,2791)$
$(29,31)$	$(659,661)$	$(1721,1723)$	$(2801,2803)$
$(41,43)$	$(809,811)$	$(1787,1789)$	$(2969,2971)$
$(59,61)$	$(821,823)$	$(1871,1873)$	$(2999,3001)$
$(71,73)$	$(827,829)$	$(1877,1879)$	$(3119,3121)$
$(101,103)$	$(857,859)$	$(1931,1933)$	$(3167,3169)$
$(107,109)$	$(881,883)$	$(1949,1951)$	$(3251,3253)$
$(137,139)$	$(1019,1021)$	$(1997,1999)$	$(3257,3259)$
$(149,151)$	$(1031,1033)$	$(2027,2029)$	$(3299,3301)$
$(179,181)$	$(1049,1051)$	$(2081,2083)$	$(3329,3331)$
$(191,193)$	$(1061,1063)$	$(2087,2089)$	$(3359,3361)$
$(197,199)$	$(1091,1093)$	$(2111,2113)$	$(3371,3373)$
$(227,229)$	$(1151,1153)$	$(2129,2131)$	$(3389,3391)$
$(239,241)$	$(1229,1231)$	$(2141,2143)$	$(3461,3463)$
$(269,271)$	$(1277,1279)$	$(2237,2239)$	$(3467,3469)$
$(281,283)$	$(1289,1291)$	$(2267,2269)$	$(3527,3529)$
$(311,313)$	$(1301,1303)$	$(2309,2311)$	$(3539,3541)$
$(347,349)$	$(1319,1321)$	$(2339,2341)$	$(3557,3559)$
$(419,421)$	$(1427,1429)$	$(2381,2383)$	$(3581,3583)$
$(431,433)$	$(1451,1453)$	$(2549,2551)$	$(3671,3673)$
$(461,463)$	$(1481,1483)$	$(2591,2593)$	$(3767,3769)$
$(521,523)$	$(1487,1489)$	$(2657,2659)$	$(3821,3823)$

$(3851, 3853)$	$(4421, 4423)$	$(5279, 5281)$	$(6197, 6199)$
$(3917, 3919)$	$(4481, 4483)$	$(5417, 5419)$	$(6269, 6271)$
$(3929, 3931)$	$(4517, 4519)$	$(5441, 5443)$	$(6299, 6301)$
$(4001, 4003)$	$(4547, 4549)$	$(5477, 5479)$	$(6359, 6361)$
$(4019, 4021)$	$(4637, 4639)$	$(5501, 5503)$	$(6449, 6451)$
$(4049, 4051)$	$(4649, 4651)$	$(5519, 5521)$	$(6551, 6553)$
$(4091, 4093)$	$(4721, 4723)$	$(5639, 5641)$	$(6569, 6571)$
$(4127, 4129)$	$(4787, 4789)$	$(5651, 5653)$	$(6659, 6661)$
$(4157, 4159)$	$(4799, 4801)$	$(5657, 5659)$	$(6689, 6691)$
$(4217, 4219)$	$(4931, 4933)$	$(5741, 5743)$	$(6701, 6703)$
$(4229, 4231)$	$(4967, 4969)$	$(5849, 5851)$	$(6761, 6763)$
$(4241, 4243)$	$(5009, 5011)$	$(5867, 5869)$	$(6779, 6781)$
$(4259, 4261)$	$(5021, 5023)$	$(5879, 5881)$	$(6791, 6793)$
$(4271, 4273)$	$(5099, 5101)$	$(6089, 6091)$	$(6827, 6829)$
$(4337, 4339)$	$(5231, 5233)$	$(6131, 6133)$	

Apêndice C

Representação da Conjectura de Goldbach para os naturais até 100

$4 = 2 + 2$	$30 = 7 + 23$	$46 = 3 + 43$	$58 = 11 + 47$
$6 = 3 + 3$	$30 = 11 + 19$	$46 = 5 + 41$	$58 = 17 + 41$
$8 = 3 + 5$	$30 = 13 + 17$	$46 = 17 + 29$	$58 = 29 + 29$
$10 = 3 + 7$	$32 = 3 + 29$	$46 = 23 + 23$	$60 = 7 + 53$
$10 = 5 + 5$	$32 = 13 + 19$	$48 = 5 + 43$	$60 = 13 + 47$
$12 = 5 + 7$	$34 = 3 + 31$	$48 = 7 + 41$	$60 = 17 + 43$
$14 = 3 + 11$	$34 = 5 + 29$	$48 = 11 + 37$	$60 = 19 + 41$
$14 = 7 + 7$	$34 = 11 + 23$	$48 = 17 + 31$	$60 = 23 + 37$
$16 = 3 + 13$	$34 = 17 + 17$	$48 = 19 + 29$	$60 = 29 + 31$
$16 = 5 + 11$	$36 = 5 + 31$	$50 = 3 + 47$	$62 = 3 + 59$
$18 = 5 + 13$	$36 = 7 + 29$	$50 = 7 + 43$	$62 = 19 + 43$
$18 = 7 + 11$	$36 = 13 + 23$	$50 = 13 + 37$	$62 = 31 + 31$
$20 = 3 + 17$	$36 = 17 + 19$	$50 = 19 + 31$	$64 = 3 + 61$
$20 = 7 + 13$	$38 = 7 + 31$	$52 = 5 + 47$	$64 = 5 + 59$
$22 = 3 + 19$	$38 = 19 + 19$	$52 = 11 + 41$	$64 = 11 + 53$
$22 = 5 + 17$	$40 = 3 + 37$	$52 = 23 + 29$	$64 = 17 + 47$
$22 = 11 + 11$	$40 = 11 + 29$	$54 = 7 + 47$	$64 = 23 + 41$
$24 = 5 + 19$	$40 = 17 + 23$	$54 = 11 + 43$	$66 = 5 + 61$
$24 = 7 + 17$	$42 = 5 + 37$	$54 = 13 + 41$	$66 = 7 + 59$
$24 = 11 + 13$	$42 = 11 + 31$	$54 = 17 + 37$	$66 = 13 + 53$
$26 = 3 + 23$	$42 = 13 + 29$	$54 = 23 + 31$	$66 = 19 + 47$
$26 = 7 + 19$	$42 = 19 + 23$	$56 = 3 + 53$	$66 = 23 + 43$
$26 = 13 + 13$	$44 = 3 + 41$	$56 = 13 + 43$	$66 = 29 + 37$
$28 = 5 + 23$	$44 = 7 + 37$	$56 = 19 + 37$	$68 = 7 + 61$
$28 = 11 + 17$	$44 = 13 + 31$	$58 = 5 + 53$	$68 = 31 + 37$

$70 = 3 + 67$
$70 = 11 + 59$
$70 = 17 + 53$
$70 = 23 + 47$
$70 = 29 + 41$
$72 = 5 + 67$
$72 = 11 + 61$
$72 = 13 + 59$
$72 = 19 + 53$
$72 = 29 + 43$
$72 = 31 + 41$
$74 = 3 + 71$
$74 = 7 + 67$
$74 = 13 + 61$
$74 = 31 + 43$
$74 = 37 + 37$
$76 = 3 + 73$
$76 = 5 + 71$
$76 = 17 + 59$
$76 = 23 + 53$
$76 = 29 + 47$
$78 = 5 + 73$
$78 = 7 + 71$
$78 = 11 + 67$
$78 = 17 + 61$
$78 = 19 + 59$
$78 = 31 + 47$
$78 = 37 + 41$
$80 = 7 + 73$
$80 = 13 + 67$
$80 = 19 + 61$
$80 = 37 + 43$
$82 = 3 + 79$
$82 = 11 + 71$
$82 = 23 + 59$
$82 = 29 + 53$
$82 = 41 + 41$
$84 = 5 + 79$
$84 = 11 + 73$
$84 = 13 + 71$
$84 = 17 + 67$
$84 = 23 + 61$
$84 = 31 + 53$
$84 = 37 + 47$
$84 = 41 + 43$
$86 = 3 + 83$
$86 = 7 + 79$
$86 = 13 + 73$
$86 = 19 + 67$
$86 = 43 + 43$
$88 = 5 + 83$
$88 = 17 + 71$
$88 = 29 + 59$
$88 = 41 + 47$
$90 = 7 + 83$
$90 = 11 + 79$
$90 = 17 + 73$
$90 = 19 + 71$
$90 = 23 + 67$
$90 = 29 + 61$
$90 = 31 + 59$
$90 = 37 + 53$
$90 = 43 + 47$
$92 = 3 + 89$
$92 = 13 + 79$
$92 = 19 + 73$
$92 = 31 + 61$
$94 = 5 + 89$
$94 = 11 + 83$
$94 = 23 + 71$
$94 = 41 + 53$
$94 = 47 + 47$
$96 = 7 + 89$
$96 = 13 + 83$
$96 = 17 + 79$
$96 = 23 + 73$
$96 = 29 + 67$
$96 = 37 + 59$
$96 = 43 + 53$
$98 = 19 + 79$
$98 = 31 + 67$
$98 = 37 + 61$
$100 = 3 + 97$
$100 = 11 + 89$
$100 = 17 + 83$
$100 = 29 + 71$
$100 = 41 + 59$
$100 = 47 + 53.$

Apêndice D

Representação da Conjectura de Legendre para $10, 10^2$ e 10^3

Para $\mathbf{n = 10}$:

$10^2 < 101, 103, 107, 109, 113 < 11^2$

Para $\mathbf{n = 10^2}$:

$100^2 < 10007, 10009, 10037, 10039, 10061, 10067, 10069, 10079, 10091, 10093, 10099, 10103, 10111, 10133, 10139, 10141, 10151, 10159, 10163, 10169, 10177, 10181, 10193 < 101^2$

Para $\mathbf{n = 10^3}$:

$1000^2 < 1000003, 1000033, 1000037, 1000039, 1000081, 1000099, 1000117, 1000121, 1000133, 1000151, 1000159, 1000171, 1000183, 1000187, 1000193, 1000199, 1000211, 1000213, 1000231, 1000249, 1000253, 1000273, 1000289, 1000291, 1000303, 1000313, 1000333, 1000357, 1000367, 1000381, 1000393, 1000397, 1000403, 1000409, 1000423, 1000427, 1000429, 1000453, 1000457, 1000507, 1000537, 1000541, 1000547, 1000577, 1000579, 1000589, 1000609, 1000619, 1000621, 1000639, 1000651, 1000667, 1000669, 1000679, 1000691, 1000697, 1000721, 1000723, 1000763, 1000777, 1000793, 1000829, 1000847, 1000849, 1000859, 1000861, 1000889, 1000907, 1000919, 1000921, 1000931, 1000969, 1000973, 1000981, 1000999, 1001003, 1001017, 1001023, 1001027, 1001041, 1001069, 1001081, 1001087, 1001089, 1001093, 1001107, 1001123, 1001153, 1001159, 1001173, 1001177, 1001191, 1001197, 1001219, 1001237, 1001267, 1001279, 1001291, 1001303, 1001311, 1001321, 1001323, 1001327, 1001347, 1001353, 1001369, 1001381, 1001387, 1001389, 1001401, 1001411, 1001431, 1001447, 1001459, 1001467, 1001491, 1001501, 1001527, 1001531, 1001549, 1001551, 1001563, 1001569, 1001587, 1001593, 1001621, 1001629, 1001639, 1001659, 1001669, 1001683, 1001687, 1001713, 1001723, 1001743, 1001783, 1001797, 1001801, 1001807, 1001809, 1001821, 1001831, 1001839, 1001911, 1001933, 1001941, 1001947, 1001953, 1001977, 1001981, 1001983, 1001989 < 1001^2.$

Apêndice E

Representação da Conjectura de Collatz para 10^{10}

Valor Inicial: 10000000000,
1ª Iteração: 5000000000,
2ª Iteração: 2500000000,
3ª Iteração: 1250000000,
4ª Iteração: 625000000,
5ª Iteração: 312500000,
6ª Iteração: 156250000,
7ª Iteração: 78125000,
8ª Iteração: 39062500,
9ª Iteração: 19531250,
10ª Iteração: 9765625,
11ª Iteração: 29296876,
12ª Iteração: 14648438,
13ª Iteração: 7324219,
14ª Iteração: 21972658,
15ª Iteração: 10986329,
16ª Iteração: 32958988,
17ª Iteração: 16479494,
18ª Iteração: 8239747,
19ª Iteração: 24719242,
20ª Iteração: 12359621,
21ª Iteração: 37078864,
22ª Iteração: 18539432,
23ª Iteração: 9269716,
24ª Iteração: 4634858,
25ª Iteração: 2317429,
26ª Iteração: 6952288,
27ª Iteração: 3476144,
28ª Iteração: 1738072,
29ª Iteração: 869036,
30ª Iteração: 434518,
31ª Iteração: 217259,
32ª Iteração: 651778,
33ª Iteração: 325889,
34ª Iteração: 977668,
35ª Iteração: 488834,
36ª Iteração: 244417,
37ª Iteração: 733252,
38ª Iteração: 366626,
39ª Iteração: 183313,
40ª Iteração: 549940,
41ª Iteração: 274970,
42ª Iteração: 137485,
43ª Iteração: 412456,
44ª Iteração: 206228,
45ª Iteração: 103114,
46ª Iteração: 51557,
47ª Iteração: 154672,
48ª Iteração: 77336,
49ª Iteração: 38668,

50ª Iteração: 19334,
51ª Iteração: 9667,
52ª Iteração: 29002,
53ª Iteração: 14501,
54ª Iteração: 43504,
55ª Iteração: 21752,
56ª Iteração: 10876,
57ª Iteração: 5438,
58ª Iteração: 2719,
59ª Iteração: 8158,
60ª Iteração: 4079,
61ª Iteração: 12238,
62ª Iteração: 6119,
63ª Iteração: 18358,
64ª Iteração: 9179,
65ª Iteração: 27538,
66ª Iteração: 13769,
67ª Iteração: 41308,
68ª Iteração: 20654,
69ª Iteração: 10327,
70ª Iteração: 30982,
71ª Iteração: 15491,
72ª Iteração: 46474,
73ª Iteração: 23237,
74ª Iteração: 69712,
75ª Iteração: 34856,
76ª Iteração: 17428,
77ª Iteração: 8714,
78ª Iteração: 4357,
79ª Iteração: 13072,
80ª Iteração: 6536,
81ª Iteração: 3268,
82ª Iteração: 1634,
83ª Iteração: 817,
84ª Iteração: 2452,
85ª Iteração: 1226,
86ª Iteração: 613,
87ª Iteração: 1840,
88ª Iteração: 920,
89ª Iteração: 460,
90ª Iteração: 230,
91ª Iteração: 115,
92ª Iteração: 346,
93ª Iteração: 173,
94ª Iteração: 520,
95ª Iteração: 260,
96ª Iteração: 130,
97ª Iteração: 65,
98ª Iteração: 196,
99ª Iteração: 98,
100ª Iteração: 49,
101ª Iteração: 148,
102ª Iteração: 74,
103ª Iteração: 37,
104ª Iteração: 112,
105ª Iteração: 56,
106ª Iteração: 28,
107ª Iteração: 14,
108ª Iteração: 7,
109ª Iteração: 22,
110ª Iteração: 11,
111ª Iteração: 34,
112ª Iteração: 17,
113ª Iteração: 52,
114ª Iteração: 26,
115ª Iteração: 13,
116ª Iteração: 40,
117ª Iteração: 20,
118ª Iteração: 10,
119ª Iteração: 5,
120ª Iteração: 16,
121ª Iteração: 8,
122ª Iteração: 4,
123ª Iteração: 2,
124ª Iteração: 1.

Apêndice F

Representação dos 10 primeiros Números Perfeitos na forma $(2^{p-1}) \cdot (2^p - 1)$

$(2^{2-1}) \cdot (2^2 - 1) = 6.$

$(2^{3-1}) \cdot (2^3 - 1) = 28.$

$(2^{5-1}) \cdot (2^5 - 1) = 496.$

$(2^{7-1}) \cdot (2^7 - 1) = 8128.$

$(2^{13-1}) \cdot (2^{13} - 1) = 33550336.$

$(2^{17-1}) \cdot (2^{17} - 1) = 8589869056.$

$(2^{19-1}) \cdot (2^{19} - 1) = 137438691328.$

$(2^{31-1}) \cdot (2^{31} - 1) = 2305843008139952128.$

$(2^{61-1}) \cdot (2^{61} - 1) = 2658455991569831744654692615953842176.$

$(2^{89-1}) \cdot (2^{89} - 1) = 191561942608236107294793378084303638130997321548169216.$

Apêndice G

Representação dos 10 primeiros pares de Números Amigos

$(\mathbf{220}, \mathbf{284})$
$S_{dp}(220) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$
$S_{dp}(284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$

$(\mathbf{1184}, \mathbf{1210})$
$S_{dp}(1184) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1210.$
$S_{dp}(1210) = 1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1184.$

$(\mathbf{2620}, \mathbf{2924})$
$S_{dp}(2620) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 131 + 262 + 524 + 655 + 1310 = 2924.$
$S_{dp}(2924) = 1 + 2 + 4 + 17 + 34 + 43 + 68 + 86 + 172 + 731 + 1462 = 2620.$

$(\mathbf{5020}, \mathbf{5564})$
$S_{dp}(5020) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 251 + 502 + 1004 + 1255 + 2510 = 55644.$
$S_{dp}(5564) = 1 + 2 + 4 + 13 + 26 + 52 + 107 + 214 + 428 + 1391 + 2782 = 5020.$

$(\mathbf{6232}, \mathbf{6368})$
$S_{dp}(6232) = 1+2+4+8+19+38+41+76+82+152+164+328+779+1558+3116 = 6368.$
$S_{dp}(6368) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 199 + 398 + 796 + 1592 + 3184 = 6232.$

$(\mathbf{10744}, \mathbf{10856})$
$S_{dp}(10744) = 1+2+4+8+17+34+68+79+136+158+316+632+1343+2686+5372 = 10856.$
$S_{dp}(10856) = 1+2+4+8+23+46+59+92+118+184+236+472+1357+2714+5428 = 10744.$

$(\mathbf{12285}, \mathbf{14595})$

$S_{dp}(12285) = 1+3+5+7+9+13+15+21+27+35+39+45+63+65+91+105+117+135+189+195+273+315+351+455+585+819+945+1365+1755+2457+4095 = 14595.$

$S_{dp}(14595) = 1+3+5+7+15+21+35+105+139+417+695+973+2085+2919+4865 = 12285.$

$(\mathbf{17296}, \mathbf{18416})$

$S_{dp}(17296) = 1+2+4+8+16+23+46+47+92+94+184+188+368+376+752+1081+2162+4324+8648 = 18416.$

$S_{dp}(18416) = 1+2+4+8+16+1151+2302+4604+9208 = 17296.$

$(\mathbf{63020}, \mathbf{76084})$

$S_{dp}(63020) = 1+2+4+5+10+20+23+46+92+115+137+230+274+460+548+685+1370+2740+3151+6302+12604+15755+31510 = 76084.$

$S_{dp}(76084) = 1+2+4+23+46+92+827+1654+3308+19021+38042 = 63020.$

$(\mathbf{66928}, \mathbf{66992})$

$S_{dp}(66928) = 1+2+4+8+16+47+89+94+178+188+356+376+712+752+1424+4183+8366+16732+33464 = 66992.$

$S_{dp}(66992) = 1+2+4+8+16+53+79+106+158+212+316+424+632+848+1264+4187+8374+16748+33496 = 66928.$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
Rua Vereador Romeu Agrário Martins, s/n - Bairro Tento - CEP 45400-000 - Valença - BA - www.portal.ifba.edu.br

Sávio Ribeiro Gomes Negrão

Teoria dos Números: Uma Análise Sobre Problemas em Aberto

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Campus Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado pela banca examinadora em 10/07/2023.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Me. Diego Coutinho Vieira Santiago (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Profa. Ms. Renata de Moura Issa Vianna
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Em 06 de agosto de 2023.

Documento assinado eletronicamente por **DIOGO SOARES DÓREA DA SILVA**, **Professor Efetivo**, em 06/08/2023, às 20:24, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **RENATA DE MOURA ISSA VIANNA**, **Professor Efetivo**, em 07/08/2023, às 14:55, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **DIEGO COUTINHO VIEIRA SANTIAGO**, **Coordenador(a) do Curso de Licenciatura em Matemática**, em 07/08/2023, às 16:26, conforme decreto nº 8.539/2015.

23280.001374/2022-62 3046500v2