INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
CAMPUS VALENÇA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MAURICIO DA SILVA

A MODELAGEM MATEMÁTICA ASSOCIADA AO ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Valença – BA
2023

MAURICIO DA SILVA

A MODELAGEM MATEMÁTICA ASSOCIADA AO ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, *Campus* Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva
Coorientador: Prof. Me. Marcelo de Araújo Lino

Valença – BA

2023

S586m Silva, Mauricio da
A Modelagem Matemática associada ao ensino da Análise Combinatória na Educação Básica.-Valença- BA: IFBA, 2023.
84f.;il.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva
Coorientador: Prof. Me. Marcelo de Araújo Lino

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) Licenciatura em Matemática- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – Campus Valença, 2023.

1.Modelagem Matemática. 2. Análise Combinatória 3. Sequência Didática I. Silva, Diogo Dórea da. II. Lino, Marcelo Araújo. III. Título. CDD 516.6

Catalogação na fonte: Cátia Almeida de Andrade CRB1403-5 IFBA Campus Valença/BA.

Dedico este trabalho a todos aqueles que contribuíram de maneira direta e indireta para a sua elaboração.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me concebeu o dom da vida, possibilitando-me chegar até aqui, com sabedoria e discernimento para superar todos os obstáculos que se apresentaram durante a minha trajetória, até a realização deste sonho.

À minha mãe Maura e ao meu pai Amaury, duas pessoas admiráveis que, apesar das dificuldades, deram-me total apoio, amor e carinho ao longo de toda a minha trajetória.

Aos meus irmãos Fernando, Flávia e Vaneide, por todo amor e carinho e pela amizade e atenção dedicadas a mim quando sempre precisei.

Ao meu cunhado Francisco, por ter me orientado a trilhar o caminho do conhecimento e ser sempre solícito, incentivando-me em todo o processo.

Aos meus avós Manoel Vitor (*in memoriam*), Eufrásia (*in memoriam*), Aurelino (*in memoriam*) e Carmelita (*in memoriam*), pelos ensinamentos de vida e por sempre me mostrarem que podemos sorrir, mesmo nos dias mais difíceis.

A todos os professores do IFBA – *Campus* Valença, por contribuírem não só para minha formação acadêmica e profissional, mas também pessoal. Em especial:

- Aos meus estimados professores e amigos Diogo Dórea (orientador) e Marcelo Lino (coorientador), por serem sempre prestativos comigo e por todo empenho, credibilidade e confiança depositada em mim. Obrigado por tudo;
- À professora Fabiane Paim e ao professor Diego Coutinho, por terem aceitado o convite para compor a banca e realizar valiosas contribuições;
- Ao professor Roque, coordenador de estágio, por ter sido bastante diligente no momento que precisei conciliar a vida acadêmica com a profissional.

Ao meu estimado colega e amigo Alex Yoshio, pelos momentos de estudos, incentivos, orientações, descontrações e risadas neste período.

A todos os meus colegas do curso, pela oportunidade do convívio e pela cooperação mútua durante esses anos. Em especial, destaco: Amanda, Ancelmo, Antônio, Fernanda, Flaviane, Gabriela, Joerbert, Daniele, Sávio, Pablo e Robson.

Aos meus colegas do IBGE de Valença, pelas flexibilizações e permutas de serviço realizadas para que eu pudesse conciliar a vida acadêmica com a profissional.

A todos os funcionários do IFBA – *Campus* Valença, em especial a seu Manoel e Isaías, por disponibilizarem em todas as noites aquele café delicioso.

A todos, os meus mais sinceros agradecimentos!

"Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar."

(Albert Einstein).

RESUMO

A Análise Combinatória, ou Combinatória, é um ramo bastante importante da Matemática e que possui um vasto campo de aplicação nas diversas áreas do conhecimento. Porém, esta área da Matemática é considerada pela maioria dos alunos da Educação Básica como um conteúdo bastante complexo e que se assemelha a um jogo de fórmulas complicadas. Partindo desse pressuposto, este presente trabalho teve como objetivo compreender como a Modelagem Matemática pode contribuir no processo de ensino da Análise Combinatória na Educação Básica. Para isso, optamos em realizar uma pesquisa com uma abordagem qualitativa, do tipo exploratória, da qual elaboramos, ao final, uma proposta de Sequência Didática para se ensinar os conceitos de Princípio Fundamental da Contagem e Combinações Simples na Educação Básica através da Modelagem. O tema utilizado na Sequência foi o de inclusão feminina no contexto social. Dentro desse aspecto, utilizamos o futebol como um esporte capaz de promover tal inclusão. A partir disso, modelamos diversas situações do futebol que envolviam os conceitos combinatórios listados acima. A partir da Sequência, concluímos que a Modelagem é uma estratégia bastante viável para se trabalhar os conteúdos combinatórios, principalmente na Educação Básica, que é a etapa em que o indivíduo desenvolve o pensamento crítico e molda sua identidade pessoal. Porém percebemos no decorrer da elaboração que esse processo requer bastante criatividade, empenho e dedicação por parte do professor, sem as quais torna-se inviável trabalhar com Modelagem.

Palavras-chave: Análise Combinatória; Modelagem Matemática; Sequência Didática.

ABSTRACT

Combinatorial Analysis, or Combinatorics, is a very important branch of Mathematics and has a wide field of application in different areas of knowledge. However, this area of Mathematics is considered by most Basic Education students as a very complex content that resembles a game of complicated formulas. Based on this assumption, this present work aimed to understand how Mathematical Modeling can contribute to the process of teaching Combinatorial Analysis in Basic Education. For this, we chose to carry out a research with a qualitative approach, of the exploratory type, from which we developed, at the end, a proposal for a Didactic Sequence to teach the concepts of Fundamental Principle of Counting and Simple Combinations in Basic Education through Modeling. The theme used in the Sequence was the female inclusion in the social context. Within this aspect, we use football as a sport capable of promoting such inclusion. From this, we modeled several soccer situations that involved the combinatorial concepts listed above. From the Sequence, we conclude that Modeling is a very viable strategy to work with combinatorial contents, mainly in Basic Education, which is the stage in which the individual develops critical thinking and shapes his personal identity. However, we realized during the elaboration that this process requires a lot of creativity, effort and dedication on the part of the teacher, without which it becomes unfeasible to work with Modeling.

Keywords: Combinatorial Analysis; Mathematical Modeling; Following Teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

ILUSTRAÇÃO 1 – CIDADE DE KÖNIGSBERG 21
ILUSTRAÇÃO 2 – MODELO CRIADO POR EULER 21
ILUSTRAÇÃO 3 – QUADRADO MÁGICO 3×3 29
ILUSTRAÇÃO 4 – REPRESENTAÇÃO DO PRINCÍPIO ADITIVO 31
ILUSTRAÇÃO 5 – REPRESENTAÇÃO DAS PERMUTAÇÕES CIRCULARES 37
ILUSTRAÇÃO 6 – OS SETE PONTOS SOBRE A CIRCUNFERÊNCIA 41
ILUSTRAÇÃO 7 – DIAGRAMA DE VENN PARA $(A \cup B)$ 44
ILUSTRAÇÃO 8 – DIAGRAMA DE VENN PARA $(A \cup B \cup C)$ 46
ILUSTRAÇÃO 9 – UMA DAS PEÇAS COM VALORES 1, 2 E 4. 50
ILUSTRAÇÃO 10 – OS 5 PONTOS SOBRE O TRIÂNGULO 54
ILUSTRAÇÃO 11 – O TRIÂNGULO SUBDIVIDIDO 55
ILUSTRAÇÃO 12 – REPRESENTAÇÃO DOS UNIFORMES 67
ILUSTRAÇÃO 13 – TOTAL DE UNIFORMES POSSÍVEIS 68
ILUSTRAÇÃO 14 – REPRESENTAÇÃO DOS PÓDIOS 69
ILUSTRAÇÃO 15 – AS TRÊS RODADAS DA PRIMEIRA FASE DO GRUPO F 72

LISTA DE TABLELAS

TABELA 1 – ALUNO E PROFESSOR NOS CASOS DE MODELAGEM........................19
TABELA 2 – REPRESENTAÇÃO DAS PERMUTAÇÕES REPETIDAS 35
TABELA 3 – REPRESENTAÇÃO DAS COMISSÕES..39
TABELA 4 – CONFRONTOS DA SEGUNDA FASE 68
TABELA 5 – GRUPOS DA COPA DO MUNDO DE FUTEBOL FEMININA 2023...........71
TABELA 6 – POSSIBILIDADES DE ESCOLHAS DOS TIMES...75
TABELA 7 – CONFRONTOS DO BRASIL 75

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

a.C.	Antes de Cristo
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CBF	Confederação Brasileira de Futebol
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
CNE	Conselho Nacional de Educação
CREMM	Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino
CVM	Centro Virtual de Modelagem
d.C.	Depois de Cristo
FIFA	Federação Internacional de Futebol
GEMM	Grupo de Estudos em Modelagem Matemática
GT	Grupo de Trabalho
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
NUPEMM	Núcleo de Pesquisa em Modelagem Matemática
PUC	Pontifícia Universidade Católica
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
TIC	Tecnologia da Informação e Comunicação
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **11**
OBJETIVOS **13**
OBJETIVO GERAL 13
OBJETIVOS ESPECÍFICOS 13
1 METODOLOGIA **14**
2 MODELAGEM MATEMÁTICA **15**
2.1 MODELO MATEMÁTICO 15
2.2 O QUE É MODELAGEM? 17
2.3 SURGIMENTO DA MODELAGEM MATEMÁTICA 20
2.4 MODELAGEM MATEMÁTICA NO BRASIL 23
2.5 A MODELAGEM NO ENSINO DE MATEMÁTICA 26
3 ANÁLISE COMBINATÓRIA **29**
3.1 BREVE HISTÓRICO DA COMBINATÓRIA 29
3.2 COMBINAÇÕES E PERMUTAÇÕES 31
3.2.1 Permutações Simples **33**
3.2.2 Permutações com Repetições **35**
3.2.3 Permutações Circulares **37**
3.2.4 Combinações Simples **38**
3.3 OUTRAS TÉCNICAS DE CONTAGEM 43
3.3.1 O Princípio da Inclusão-Exclusão **43**
3.3.2 Combinações Completas **48**
3.3.3 O Princípio das Gavetas de Dirichlet **52**
3.4 A BNCC E O ENSINO DA COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA 56
4 O ENSINO DA COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA MODELAGEM **59**
4.1 O QUE É SEQUÊNCIA DIDÁTICA? 59
4.2 UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA 63
4.2.1 Roteiro didático da Sequência **64**
CONSIDERAÇÕES FINAIS **78**
REFERÊNCIAS **80**

INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória, ou Combinatória, é um ramo da Matemática que tem como principal objetivo estudar estruturas e relações discretas. Seu universo de estudo é amplo, não se resumindo apenas a problemas de contagem, como é comumente conceituada. Além disso, possui um vasto campo investigativo e de aplicação, sendo utilizada nas diversas áreas do conhecimento, como na Probabilidade e na Ciência Computacional.

Além de ser um ramo de grande relevância nas diversas áreas do conhecimento, a Combinatória é também fundamental na formação do pensamento crítico do indivíduo. Nesse sentido, estudá-la se faz necessário, principalmente na Educação Básica, que é a etapa em que o indivíduo desenvolve esse pensamento e molda sua identidade pessoal.

Porém, nessa etapa da educação a Combinatória costuma ser bastante temida pelos alunos, os quais apresentam muitas dificuldades nesse conteúdo. Isso advém, muitas vezes, da forma de como os professores abordam esse tema em sala de aula. Para Mello (2017), eles podam esse lado investigativo que a Combinatória possui optando em mostrar primeiro as fórmulas e como aplicá-las nos problemas combinatórios.

Além disso, a utilização excessiva de fórmulas no ensino desses conteúdos impulsiona a desmotivação e inibe o aluno a raciocinar sobre tal assunto. Segundo Morgado *et al* (1991), essas atitudes contribuem diretamente para que a Combinatória seja considerada pelos alunos como sendo apenas um jogo de fórmulas complicadas.

Nessa perspectiva, discute-se muito a importância da busca por novos métodos para se ensinar Matemática e, em especial, os conceitos combinatórios. Isso se torna importante para que se busque sempre o pensamento investigativo e o engajamento dos alunos no processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo.

Nesse ensejo, D'Ambrosio (2009) aponta que tornar essa proximidade do aluno com os ensinamentos matemáticos, buscando sempre o pensamento crítico, será o novo papel do professor de Matemática. Para isso, o docente deverá buscar estratégias para contornar os conceitos sobre Educação e sobre Matemática já existentes na sociedade, prezando sempre pela igualdade no acesso ao conhecimento.

Olhando por esse contexto, surgiram o que conhecemos hoje como sendo as novas tendências em Educação Matemática. Elas buscam, dentre outras coisas, propor novas visões sobre a matéria e visam a aproximação do aluno com os conteúdos de maneira a perceber sua essência, além de desenvolver o pensamento crítico tanto do aluno quanto do professor.

Segundo Magnus (2018), as novas tendências em Educação Matemática são: Modelagem Matemática, Resolução de Problemas, Etnomatemática, TICs[1] no Ensino de Matemática, História no Ensino da Matemática, Leitura e Escrita Matemática. Neste trabalho fixaremos nossos olhares para a Modelagem Matemática como uma estratégia para o ensino da Análise Combinatória na Educação Básica.

Assim como todas as atuais tendências em Educação Matemática, a Modelagem se destaca principalmente por buscar romper com o ensino tradicional. Sua utilização, principalmente na Educação Básica, contribui diretamente para o desenvolvimento do pensamento crítico e ativo do aluno.

Atualmente há diversas concepções a respeito da Modelagem. Burak (1992), por exemplo, a aborda como uma metodologia de ensino. Já Malheiros (2004) a trata como uma estratégia pedagógica. Biembengut e Hein (2003) e Bassanezi (2006) a define como uma arte, sendo esta uma estratégia de ensino-aprendizagem. Já Barbosa (2001) trata a Modelagem como um ambiente de aprendizagem.

Embora sejam concepções distintas, em todas os autores concordam no sentido de que a Modelagem tem como base principal utilizar a Matemática para compreender e resolver problemas oriundos do cotidiano. Assim, baseando-se nessa interseção sobre Modelagem, bem como na intenção do autor em utilizá-la para contribuir para o ensino da Combinatória na Educação Básica, buscaremos elucidar o seguinte problema de pesquisa:

- **Como a Modelagem Matemática pode contribuir no processo de ensino da Análise Combinatória na Educação Básica?**

Com o intuito de obter dados para elucidar o problema de pesquisa apresentado acima, listaremos a seguir alguns objetivos para nortear esse processo.

[1] TIC é a abreviação para Tecnologia da Informação e Comunicação.

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL

Compreender como a Modelagem Matemática pode contribuir no processo de ensino da Análise Combinatória na Educação Básica.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analisar a Modelagem Matemática como estratégia metodológica no ensino de Análise Combinatória na Educação Básica;
- Conceituar os Métodos de Contagem abordados na Educação Básica e outras técnicas que não são comumente utilizadas nesta etapa da Educação;
- Propor uma Sequência Didática para ensinar os conceitos combinatórios na Educação Básica utilizando a Modelagem Matemática.

Nesse sentido, optaremos por realizar uma pesquisa com uma abordagem qualitativa, do tipo exploratória. Os dados serão coletados a partir de uma pesquisa bibliográfica, da qual iremos produzir ao final uma Sequência Didática para o ensinamento da Análise Combinatória na Educação Básica utilizando a Modelagem Matemática.

Diante do exposto, descreveremos a seguir os procedimentos científicos que serão utilizados e os caminhos metodológicos a serem percorridos para a realização da pesquisa.

1 METODOLOGIA

Para alcançar os objetivos propostos, optaremos por realizar a pesquisa com uma abordagem qualitativa que, para Borba e Araújo (2019), busca descrever informações prezando pelos seus significados. Assim, iremos analisar e interpretar a Modelagem como uma proposta para o ensino da Análise Combinatória na Educação Básica.

Nesse contexto, tendo em vista a necessidade de tornar as discussões a respeito da Modelagem mais explícitas e também de poder levantar hipóteses sobre sua utilização no ensino da Combinatória na Educação Básica, optaremos por uma pesquisa do tipo exploratória. Esta, segundo Gil (2002, p.1), tem

> [...] como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a tomá-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições.

Para isso, será feita uma pesquisa bibliográfica que, segundo Gil (2002, p.3), "é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos". Nessa perspectiva, buscaremos, em livros e artigos, estudos sobre a Modelagem e suas aplicações no ensino da Análise Combinatória.

Para a análise dos dados, será feita uma comparação entre as teorias existentes sobre a Modelagem e suas aplicações no ensino dos conceitos combinatórios. Essa etapa, segundo Teixeira (2011, p. 191), "é o processo de formação de sentido além dos dados, e esta formação se dá consolidando, limitando e interpretando o que as pessoas disseram e o que o pesquisador viu e leu, isto é, o processo de formação de significado".

Buscaremos, com isso, realizar uma Sequência Didática para o ensino da Análise Combinatória na Educação Básica utilizando como estratégia a Modelagem Matemática. Essa Sequência poderá ser utilizada e adaptada posteriormente pelos professores da Educação Básica para ensinar os conceitos combinatórios através da Modelagem Matemática.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo abordaremos a ideia de modelo matemático, bem como o que é Modelagem Matemática, destacando sua evolução histórica no mundo e no Brasil. Além disso, discutiremos seus principais conceitos, focos de abordagem, principais autores e sua utilização como estratégia para o ensino de Matemática.

2.1 MODELO MATEMÁTICO

O homem desde sempre vem recorrendo ao uso de modelos, seja para se comunicar ou para praticar uma determinada ação. Segundo Renz Júnior (2015), no contexto da Matemática, a utilização de modelos é comumente vista, principalmente para representar, explicar e compreender situações que podem ou não ser da área em questão.

O termo “modelo” deriva do latim *modellum*, o qual possui como significado a ideia de medida em geral. Já o dicionário Houaiss traz a palavra modelo como sendo aquilo que serve de referência ou que é dado para ser representado. Para esta pesquisa, utilizaremos a palavra modelo em sua essência, ou seja, algo que serve de representação para uma situação.

Segundo Biembengut e Hein (2014), um modelo pode ser formulado em termos familiares, podendo se utilizar dos diversos ramos da Matemática em seu processo. A construção desse modelo, segundo Santos (2016), visa antecipar a evolução de um determinado fenômeno real.

Há, atualmente, diversas concepções a respeito de modelo matemático, dentre as quais listaremos algumas a seguir:

> Qualquer representação simplificada da realidade ou de um aspecto do mundo real que surja como de interesse ao pesquisador, que possibilite reconstruir a realidade, prever um comportamento, uma transformação ou uma evolução. (CRISTOFOLETTI, 1999, p.47)
>
> [...] deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais). (BASSANEZI, 2006, p.19 – 20).
>
> [...] é um sistema conceitual, descritivo e explicativo, expresso por meio de linguagem Matemática ou estrutura Matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo realizar previsões sobre este outro sistema. (ALMEIDA, SILVA E VERTUAN, 2012, p. 13)

Ainda de acordo com Bassanezi (2006), ao passo que procuramos refletir sobre uma parte da realidade, na busca por explicar, entender, ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar no sistema argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial, chamado de modelo.

Conforme aponta Alves (2017), podemos ver exemplos de criação de modelos matemáticos em diversas situações cotidianas, tais como: elaboração do orçamento para construção de uma casa, a quantidade de suco que pode ser produzido com uma certa quantidade de maracujás, entre outras.

Nessa perspectiva, Bassanezi (2011, p.17-18) divide o modelo, quanto à forma de representar um sistema, em dois tipos, sendo eles os seguintes:

> **Modelo objeto** - é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser pictórica (um desenho, um esquema compartimental, um mapa etc.), conceitual ou simbólica.
> **Modelo teórico** - é aquele vinculado a uma teoria geral existente - será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses ou de experimentos.

Embora vejamos diferentes definições para o que é modelo matemático, concordamos com Renz Júnior (2015) ao notar a essência destes conceitos. Segundo o autor, esta base conceitual de modelo se pauta em uma representação simplificada da realidade, através da Matemática, sob a visão do investigador.

Esse processo de representação da realidade, do qual se obtém um modelo matemático, denomina-se Modelagem Matemática, ou apenas Modelagem. Por ser um tema bastante amplo, estudá-lo-emos com mais precisão a seguir.

2.2 O QUE É MODELAGEM?

O processo descrito anteriormente, o qual visa a representação da realidade por meio da Matemática buscando se obter um modelo matemático, recebe o nome de Modelagem Matemática. (RENZ JÚNIOR, 2015). Nessa perspectiva, de acordo com Almeida (2013), a Modelagem objetiva-se a propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos.

Nesse sentido, segundo Renz Júnior (2015, p. 19) "o modelo matemático é o que dá forma à solução do problema enquanto que a Modelagem Matemática é o processo de obtenção dessa solução". Segundo o autor, a solução de problemas utilizando-se de modelos matemáticos nos remete ao desenvolvimento da Matemática e de suas aplicações.

A Modelagem Matemática pode ser entendida como uma espécie, dentre as várias tendências que têm se destacado atualmente no mundo da Educação Matemática. Tais linhas de pensamento, segundo Soares (2019), visam proporcionar aos alunos aulas mais proveitosas e motivadoras, buscando sempre inserir o aluno em seu contexto social e torná-lo crítico.

Essa tendência em Educação Matemática possui diversas abordagens, podendo "ser tomada tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem" (BASSANEZI, 2006, p. 16). Além disso, há, atualmente, diversas concepções a respeito do seu significado.

Dentre os vários entendimentos sobre a temática, citamos, inicialmente, a de Bassanezi (2006), o qual fala que a "modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual." (BASSANEZI, 2006, p. 24).

Biembengut e Hein (2014) concordam com essa ideia ao citarem que a Modelagem se caracteriza como uma arte ao formular, resolver e elaborar expressões que sirvam tanto para uma solução particular quanto para suporte em outras aplicações e teorias. Para os autores, esse processo visa, essencialmente, a obtenção de um modelo matemático.

D'Ambrósio (1996), por sua vez, entende a Modelagem como um processo de reflexão sobre a realidade, do qual se obtém uma ação estruturada, racional. Tal atitude ocorre por meio da elaboração de modelos sobre os quais o aluno manipula, utilizando-se de toda a sua experiência, conhecimento e recursos naturais.

Por outro lado, com uma visão mais voltada para o ensino de Matemática, Burak (1992, p. 62) afirma que Modelagem é um "conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões".

Nessa mesma perspectiva educacional, mas com uma abordagem sociocrítica, Barbosa (2001, p. 6) define que a "modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade".

Esse entendimento de Barbosa (2001) baseia-se na indagação do aluno, pois segundo ele, tal atitude leva o discente à investigação e isso torna a Modelagem uma experiência livre. Nesse sentido, na visão do autor, esse processo não se limita somente à explicitação do problema, mas sim uma atitude que transpõe o processo de resolução.

Concordamos com Barbosa (2001) quando ele fala que as práticas com Modelagem oferecem oportunidades para explorar os papéis que a Matemática desenvolve no âmbito social. Segundo o autor, tanto a Matemática quanto a Modelagem não são 'fins', mas 'meios' que potencializam o questionamento da realidade através de reflexões sobre a Matemática, a própria Modelagem e seu significado social.

Corroborando essa abordagem de Barbosa, Renz Júnior (2015, p. 19) discorre que a "Modelagem Matemática não deve servir apenas como motivo para a aplicação de um conteúdo, mas sim para revelar como ele surgiu, justificando o porquê de aprendê-lo e qual o seu verdadeiro significado na vida do estudante".

Segundo Barbosa (2004), um ambiente de Modelagem está diretamente ligado à problematização e investigação. Segundo o autor,

> [...] o primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo. (BARBOSA, 2004, p. 3).

Como podemos perceber na literatura, diversos autores dividem a Modelagem em etapas, ou fases, as quais tendem a facilitar a obtenção de um modelo. Porém, Barbosa não o faz, pois segundo ele (2001), o processo de Modelagem pode, ou não, chegar a um modelo. Tudo depende do encaminhamento das atividades e de como o professor as conduz.

O autor vai de encontro à ideia de que a Modelagem é algo fechado, pois segundo ele, essa tendência "[...]é um grande 'guarda-chuva', onde cabe quase tudo. Com isso, não quero dizer que exista a necessidade de se ter fronteiras claras, mas de se ter maior clareza sobre o que chamamos de Modelagem" (BARBOSA, 2004, p. 73).

Nesse sentido, ele sugere, em uma perspectiva pedagógica, que o desenvolvimento das atividades de Modelagem em sala pode ser realizado em três casos, sendo eles:

> **Caso 1**: O professor propõe o problema, traz todas as informações necessárias para resolução, ficando para o aluno a responsabilidade de construir o modelo e encontrar a solução do problema.
> **Caso 2**: O professor traz o problema que geralmente é de áreas distintas, ou seja, diferentes áreas do conhecimento que não pertence à Matemática, cabendo aos alunos a busca pelos dados para resolver o problema.
> **Caso 3**: Este é um pouco diferente, pois, aqui o tema pode ser escolhido pelo professor ou pelos alunos. Os alunos têm um pouco mais de participação, pois, trazem o problema e integram-se em todas as etapas para resolver o problema, isto é, buscam informações que possibilitem a criação do modelo bem como a validação deste (BARBOSA, 2001 p.9).

A tabela a seguir, elaborada por Barbosa (2001, p.9), ilustra a relação entre professor-aluno nos casos de Modelagem listados anteriormente.

TABELA 1 – ALUNO E PROFESSOR NOS CASOS DE MODELAGEM

	CASO 1	**CASO 2**	**CASO 3**
Elaboração da situação problema	*Professor*	*Professor*	*Professor/aluno*
Simplificação	*Professor*	*Professor/aluno*	*Professor/aluno*
Dados qualitativos e quantitativos	*Professor*	*Professor/aluno*	*Professor/aluno*
Resolução	*Professor/aluno*	*Professor/aluno*	*Professor/aluno*

Fonte: adaptada de Barbosa (2001, p.9).

Além disso, Barbosa (2004) entende que existem lacunas no processo do saber-fazer Modelagem no contexto escolar. Ele indica duas competências a serem alcançadas para a formação dos professores em relação à Modelagem, sendo uma a experiência do aluno em testar várias situações de atividades com Modelagem, e a outra seria a experiência como aluno e a experiência como professor, no que diz respeito ao desenvolvimento de tais atividades.

Nessa perspectiva, achamos razoável basear nosso trabalho na concepção geral de Modelagem, mas com uma tendência para a visão de Barbosa sobre o tema. Contudo, não queremos desmerecer as outras concepções existentes na literatura, as quais se mostram fundamentais para as discussões do assunto.

2.3 SURGIMENTO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Não há registros concretos a respeito do surgimento da Modelagem no mundo. Segundo Biembengut e Hein (2003), ela é tão antiga quanto a própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos. No Egito e na Babilônia, por exemplo, o homem já utilizava a ideia de modelar problemas baseando-se em passos e procedimentos ordenados, como na construção de pirâmides. (ROQUE, 2012).

Segundo a autora, na Antiguidade, o homem preocupava-se muito com as questões aplicacionais e usuais dos conhecimentos matemáticos adquiridos. Porém, já se utilizava bastante a relação entre os assuntos da própria Matemática e também os relacionavam com outras áreas. Boyer (1974) cita como exemplo as relações diretas e indiretas que os babilônicos faziam ao abordar conceitos matemáticos na Economia e na Agricultura.

Contudo, como os povos tinham necessidades diárias e estas eram sempre comuns, o homem passou então a se preocupar em modelar essas situações, fazendo uma espécie do que chamamos atualmente de generalização (ROQUE, 2012). Esse processo, segundo a autora, mostrava-se como uma espécie de interpolação matemática, na qual eles modelavam um certo algoritmo para um problema e o adaptava para outras situações.

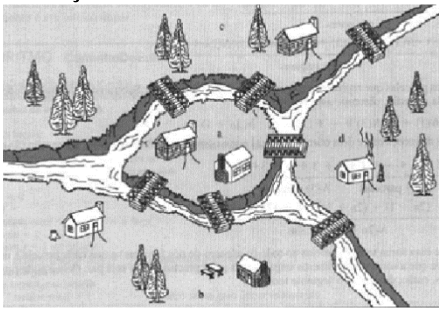
Para isso, segundo Roque (2012), os habitantes daquela época utilizavam listas de procedimentos que eram impressos em tabletes de argila, as quais contêm até hoje problemas e passos para suas resoluções. De acordo com a autora, nas traduções desses tabletes feitas por historiadores da área:

> [...] podemos constatar um tipo de generalidade nos algoritmos usados na solução. A generalidade dos algoritmos babilônicos é distinta, pois eles constroem uma lista de exemplos típicos, interpolando-os, em seguida, para resolver novos problemas. Os algoritmos eram enunciados para casos particulares, mas isso não significa que não houvesse um certo tipo de generalidade. (ROQUE, 2012, p. 54).

Além dessas situações realizadas pelos babilônicos, Silveira, Ferreira e Silva (2013) abordam em suas pesquisas algumas situações na História em que a Modelagem Matemática foi utilizada para interpretar e resolver situações cotidianas. Dentre elas, destacamos o problema das Pontes de Königsberg, que foi resolvido por Leonhard Euler, em 1736.

A cidade de Königsberg, na Prússia, hoje Kaliningrado, Rússia, possuía sete pontes que passavam pela cidade e conectavam duas ilhas entre si e as ilhas com as margens, como podemos ver na Ilustração 1.

ILUSTRAÇÃO 1 – CIDADE DE KÖNIGSBERG



Fonte: Researchgate.

Os habitantes da cidade costumavam passear atravessando as sete pontes ilustradas anteriormente. Porém, durante essas caminhadas, surgiu entre eles o seguinte questionamento: *Partindo-se de qualquer uma das regiões, margens ou ilhas, seria possível atravessar as sete pontes sem passar duas vezes por cada uma, retornando ao ponto de partida?*

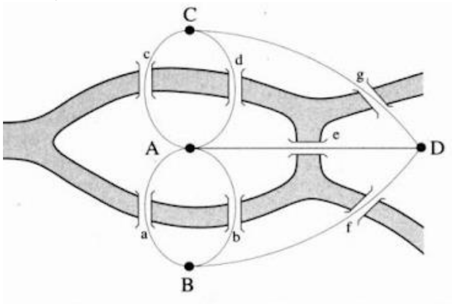
Essa problemática, tida como lenda, enigma, recreação ou ainda como "charada matemática", tornou-se conhecida como "O Problema das Pontes de Königsberg", ficando a cargo do matemático Euler resolvê-lo. (SILVEIRA, FERREIRA, SILVA, 2013).

Euler apresentou a solução da situação problema à Academia de Ciências de São Petersburgo, na Rússia, em 1736. Segundo os autores,

> ao elevar a charada matemática a um grau de problema de matemática, Euler, como de costume, não se contentou em simplesmente resolvê-lo, deu também um rigor a solução. Rigor em matemática tem a ver com definições, postulados, axiomas e, principalmente, com teoremas, dando, assim, início a Teoria dos Grafos. (SILVEIRA, FERREIRA, SILVA, 2013, P. 4).

Em uma linguagem atual, poderíamos afirmar que Euler elaborou uma espécie de modelo matemático, o qual foi representado por um diagrama análogo ao da Ilustração 2.

ILUSTRAÇÃO 2 – MODELO CRIADO POR EULER



Fonte: AEClassic.

Essa corrente estruturalista de Modelagem, a qual busca por formulações de Modelos para dados problemas do cotidiano ou de outras áreas deu início à chamada Matemática Aplicada. Silveira, Ferreira e Silva (2013, p 5) ressaltam que embora

> [...] a ideia de Modelagem Matemática acompanhe a própria História da Matemática, a expressão, em seu conceito moderno, surgiu durante o Renascimento, principalmente após Galileu criar o novo método científico, combinando experimentação e teorização matemática.

Por outro lado, a busca por modelos, segundo Lima Filho (2008, p. 15), "vem sendo amplamente usada por engenheiros, físicos, estatísticos e economistas desde a década de 1940, pelo menos". Nesse sentido, Silveira, Ferreira e Silva (2013) pontua que tais modelos obtiveram mais precisão, notoriedade e confiabilidade devido a uma maior dedicação dos matemáticos da área.

Nessa perspectiva, Bassanezi (2006, p. 20) pontua que "a importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidade". Essa busca por modelos, segundo Biembengut e Hein (2003), tornou a Modelagem, inicialmente, uma estratégia voltada muito mais para um viés científico e representativo da realidade cotidiana, embora haja um viés educacional atualmente.

2.4 MODELAGEM MATEMÁTICA NO BRASIL

As discussões a respeito da Modelagem Matemática no Brasil se deram a partir da década de 70, com uma forte influência internacional. O movimento que norteou as pesquisas em Modelagem, definido como "utilitarista", baseava-se na aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade. (BIEMBENGUT, 2009).

No Brasil essas discussões foram abordadas por autores mais ligados à Educação Matemática, os quais impulsionaram essa tendência de Modelagem, mas com uma abordagem diferente. Nesse sentido, segundo Biembengut (2009), os precursores da Modelagem no Brasil foram: Aristides Camargos Barreto, Ubiratan D'Ambrosio, Rodney Carlos Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani.

Biembengut (2009) relata que, devido aos autores brasileiros que tratam sobre Modelagem serem, principalmente, ligados à Educação Matemática, houve uma forte tendência destes na perspectiva da Modelagem enquanto metodologia de ensino, além de emergir, posteriormente, uma linha de pesquisa na área de Modelagem.

Fiorentini (1996) discorre que no Brasil as práticas da Modelagem possuem um forte viés antropológico, político e sociocultural, já que buscam partir do contexto real dos alunos e de seus interesses cotidianos. Nesse sentido, percebe-se que essa perspectiva de se ensinar Matemática utilizando a Modelagem é tipicamente brasileira.

Kaiser-Messmer (1991 apud BARBOSA, 2001, p.2) ratifica essa ideia, ao apontar que o movimento internacional da Modelagem não apresenta uma preocupação de forma muito aparente sobre o ensino de Matemática, diferentemente do que ocorre aqui no Brasil.

Dentre os precursores da Modelagem no Brasil, Biembengut (2009) relata que Barreto e Bassanezi foram os que deram os primeiros passos para a implementação e disseminação desta tendência no ensino de Matemática. Segundo Renz Júnior (2015), os resultados das experiências desses autores foram positivos e os motivaram a pesquisar e sugerir novas formas de se trabalhar com Modelagem.

De acordo com Biembengut (2009), Barreto teve contato com a Modelagem na década de 60, mas iniciou seus trabalhos 10 anos depois, quando passou a dar aulas na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC – Rio. Segundo a autora, Barreto sempre buscou utilizar a ideia em suas diversas turmas de Engenharias, trabalhando Matemática e relacionando-a com as diversas áreas do conhecimento.

Posteriormente, segundo a autora, Barreto orientou duas dissertações sobre Modelagem na pós-graduação, sendo as primeiras sobre o tema na PUC – Rio. Isso, segundo

Renz Júnior (2015), impulsionou as discussões a respeito do tema no contexto acadêmico, dando mais notoriedade a ele. Essas experiências, segundo Biembengut (2009), levaram Barreto a defender sua proposta em diversos eventos, nacionais e internacionais.

Em um desses eventos em que Barreto apresentara a Modelagem para o Brasil e para o mundo, Bassanezi a conheceu, interessando de imediato pela ideia. A partir daí, ele buscou aplicar atividades com esse enfoque em suas turmas (BIEMBENGUT, 2009). Segundo a autora, Bassanezi,

> [...] que já conhecia modelagem por meio da Matemática Aplicada, na década de 1980, ao coordenar um Curso para 30 professores de Cálculo Diferencial Integral (CDI) de diversas Instituições de Educação Superior da região sul do Brasil, com duração de uma semana, vê uma oportunidade de introduzir a proposta de Barreto. (BIEMBENGUT, 2009, p. 11).

De acordo a autora, Bassanezi propôs aos alunos que eles se reunissem por um tempo e apresentassem um tema no qual se aplicava CDI. Com as apresentações dos alunos, Bassanezi aproveitou para iniciar com eles estudos sobre aplicações da Matemática na Biologia. Tal relação é chamada atualmente de bio-matemática.

Posteriormente, segundo Renz Júnior (2015) e Biembengut (2009), Bassanezi promoveu o primeiro curso de especialização em Modelagem Matemática. Depois disso, alavancou a realização de diversos outros cursos ligados a essa temática, nas mais variadas instituições de Ensino Superior no Brasil, colaborando também com diversos programas de mestrado na área de Modelagem.

Atualmente, há diversos movimentos no Brasil que possuem como pauta principal a evolução da Educação Matemática. Tais movimentos, de acordo com Biembengut (2009), vêm contribuindo para as reformulações curriculares e a implantação de propostas pedagógicas inovadoras para melhorar a aprendizagem da Matemática na Educação Básica e Superior brasileira.

Esses movimentos, segundo Quartieri e Knijnik (2012), tinham como um dos seus objetivos inserir a Modelagem nas diversas grades curriculares da Educação Brasileira, bem como nas grades de formações continuadas de professores. Essa inserção indica

> [...] o quanto a modelagem, a cada dia, ganha adeptos e defensores em níveis oficiais de educação, em quase todos os Estados brasileiros devido à possibilidade em promover aos jovens, desse milênio em particular (jovens da geração tecnológica), melhores conhecimentos e habilidades em utilizá-los. (BIEMBENGUT, 2009, p.17).

Baseando-se nisso, Biembengut publicou, em 2009, um mapeamento sobre Modelagem no Brasil, o qual apresentou um grande número de atividades e pesquisas sobre a temática. Concordamos com Quartieri e Knijnik (2012) ao afirmarem que tal levantamento quantitativo publicado por Biembengut legitima, através dos números, a consolidação do discurso sobre Modelagem na Educação Matemática Brasileira.

Além disso, segundo Aragão e Barbosa (2016), essa pesquisa publicada por Biembengut evidenciou as diversas concepções e conceitos sobre Modelagem no Brasil, as quais variam de acordo com quem as utiliza ou da forma de abordagem de cada um. Essa diversidade de conceitos, segundo Bastos e Rosa (2020), torna o Brasil um centro de referência em ensino de Matemática através da Modelagem.

Como apontam Silveira, Ferreira e Silva (2013), os estudos sobre Modelagem tomaram proporções tão grandes, que a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) criou o Grupo de Trabalho (GT) em Modelagem Matemática. Posteriormente, em Blumenau, Santa Catarina, Biembengut funda o Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino (CREMM).

Segundo os autores, há, no Brasil atualmente, diversos grupos de pesquisas na área de Modelagem, dentre os quais podemos citar o Núcleo de Pesquisa em Modelagem Matemática (NUPEMM), o Grupo de Estudos em Modelagem Matemática (GEMM) e o Centro Virtual de Modelagem (CVM).

Silveira, Ferreira e Silva (2013) afirmam que tais grupos têm em comum a busca da integração dos professores e pesquisadores com o material disponível sobre Modelagem Matemática, ratificando a importância que o tema tem no Brasil.

2.5 A MODELAGEM NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Atualmente, com os avanços tecnológicos oriundos da Indústria 4.0, a Educação vem passando por diversos desafios. Nesse sentido, tanto o currículo quanto os métodos de Ensino necessitam de reestruturações, de forma a potencializar a capacidade do aluno em obter um pensamento crítico e independente nesta nova sociedade. (FONSECA, 2017).

Para isso, segundo D'Ambrosio (2009), os professores devem despertar e desenvolver nos alunos a capacidade de ler e interpretar, inclusive matematicamente, essas situações. Nessa perspectiva, a Modelagem surge como uma alternativa bastante viável e relevante para o ensino de Matemática, principalmente na Educação Básica.

Essa importância se dá por conta de ela não ser um procedimento rígido e fechado, mas sim por ser dinâmico, na qual o aluno mensura dados e dá sugestões sobre temas diversos. Esse processo, segundo Fonseca (2017), propicia debates, discussões, interpretação de dados, tabelas e gráficos, abrangendo, assim, vários aspectos nos quais o aluno se torna um sujeito ativo desse novo conhecimento.

Porém, como aponta Klüber e Burak (2007), a maior problemática enfrentada em relação ao ensino de Matemática na Educação Básica é a linearidade do currículo, visto que a forma de apresentação dos conteúdos dificulta o desenvolvimento de conceitos, por solicitar uma certa ordem na qual os pré-requisitos se tornam essenciais e, por isso, engessam o ensino.

Nesse sentido, muito se discute sobre a implementação da Modelagem no currículo. Para Skovsmose (2000) e Barbosa (2004), ela não deve ser entendida como uma ilha isolada das outras atividades. Assim, sua inserção curricular deve ocorrer em harmonia com outras práticas, tendo como objetivo o aprendizado e a formação crítica do indivíduo.

Nessa mesma ideia, conforme aponta Brumano (2014), em um ambiente de Modelagem, os conteúdos trabalhados emergem da necessidade e relacionam-se com o contexto da escola, dos professores, dos alunos e até mesmo da sociedade. Concordando com essa ideia, Klüber e Burak (2007, p. 7- 8) discorrem que

> O contexto, então, não é apenas aquele que o indivíduo ou grupo está inserido, mas também o mundo que ele vive e convive, influencia e é influenciado. Dito de outra maneira, o conteúdo matemático foi contextualizado, o que permitiu avaliar o contexto do mercado, as diferenças, as discrepâncias e outras variáveis do gênero. Permitiu extrapolar o simples contexto da matemática com característica mais internalista e encontrar relações em outras esferas de significado, como a econômica.

A utilização da Modelagem, segundo Brumano (2014, p. 48), "busca uma inversão do processo curricular que se encontra nas escolas, pois os conteúdos surgem devido às suas necessidades e dentro das situações-problema buscadas pelos alunos, derrubando-se assim, a "ordem" que o currículo tradicional impõe aos conteúdos matemáticos".

Além disso, nos documentos oficiais que versam sobre Educação nota-se essa busca por um currículo diversificado. A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018), por exemplo, propõe essa quebra com os currículos diretivos e se mostra aberta para discussões, principalmente quando aborda as questões da interdisciplinaridade e a valorização do contexto social do aluno. Nesse viés, Chaves e Lorenzoni (2010) apontam o seguinte:

> O trabalho com modelagem matemática também permite que se rompa com os dispositivos táticos e estratégicos do Ensino Tradicional de Matemática, abrindo então espaço para novos cenários pautados na investigação e no trabalho colaborativo e participativo envolvendo alunos e professores. (CHAVES, LORENZONI, 2010, p. 10).

Podemos mencionar, ainda, o viés crítico que a Modelagem pode desenvolver ao ser utilizada, conforme aponta os mesmos autores:

> No viés da modelagem matemática, enquanto estratégia de ensino, o aluno se envolve, pesquisa, participa, inquire, toma as rédeas da situação, tornando-se assim um indivíduo ativo, participativo, responsável e ciente de seus atos (CHAVES, LORENZONI, 2010, p. 10).

Ao buscar trabalhar Modelagem em sala, conforme aponta Barbosa (2004), deve-se levar em conta dois pontos, os quais são fundamentais nesse processo. O primeiro é aliar o tema a ser escolhido com o cotidiano dos alunos. Já o segundo é aproveitar as experiências fora da sala, interligando-as com as experiências realizadas dentro dela.

Conforme podemos notar, incluir a Modelagem no currículo pode ser uma estratégia viável para o ensino de Matemática. Porém, os professores podem encontrar diversos desafios nesse processo, dentre os quais Viecili (2006) cita alguns:

> (1) a falta de apoio das instituições de ensino no sentido de viabilizar condições necessárias e suficientes para novas práticas; (2) a própria desmotivação por parte do professor que exerce uma carga excessiva de horas de trabalho; (3) a falta de interesse por parte dos alunos e a indisciplina; (4) a falta de tempo para a elaboração de projetos alternativos de ensino. (VIECILI, 2006, P. 28)

Conforme pontua Viecili (2006), há também a resistência de alguns professores da área, os quais não buscam novas formas para o ensino em suas aulas. De acordo com a autora, eles ficam acostumados com o ensino tradicional e se opõem à tentativa de buscar novas metodologias e à possibilidade de mudar suas práticas em sala.

Para contornar esse comodismo que os professores têm com o processo educacional, Bassanezi (2006) aponta que a inclusão da Modelagem no ensino tem sido defendida por várias pessoas envolvidas com a Educação Matemática. Além disso, segundo o autor, as discussões sobre o tema vêm sendo amplamente difundidas no mundo e no Brasil.

Embora estejamos aqui defendendo a Modelagem na Educação Básica, tal tendência pode ser utilizada em qualquer etapa, conforme aponta Biembengut e Hein (2014). Nesse sentido, os autores pontuam que, em qualquer que seja a etapa:

> A condição necessária para o professor implementar modelagem no ensino – modelação – é ter audácia, grande desejo de modificar sua prática e disposição de conhecer e aprender, uma vez que essa proposta abre caminho para descobertas significativas. Um embasamento na literatura disponível sobre Modelagem Matemática, alguns modelos clássicos e sobre pesquisas e experiências no ensino são essenciais. (BIEMBENGUT, HEIN, 2014, p. 30).

De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2013), um dos papéis do professor no processo de Modelagem é o de orientador. Para os autores:

> [...] a) orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, é sugerir procedimentos; b) orientar não é dar respostas prontas e acabadas, orientar não é sinalizar que "vale-tudo" c) orientar não é esperar que o aluno simplesmente siga exemplos; d) orientar não é livrar-se de estudar, de se preparar para o exercício da função; e) orientar não é despir-se da autoridade de professor. (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2013, p.24).

Ao usar a Modelagem, conforme pontua Barbosa (2004), o docente tem a chance de transformar suas práticas mediante a motivação, o interesse, a participação e a vontade dos alunos em aprenderem e evoluírem cada vez mais. Tal evolução e crescimento criarão possibilidades de eles refletirem criticamente sobre suas ações.

3 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste capítulo abordaremos um breve histórico da Combinatória, bem como discutiremos sobre seu estudo na Educação Básica, enfatizando algumas técnicas bastante utilizadas e outras não tão usuais, mas que merecem atenção. Para isso, utilizamos como base as obras de Franco (2020), Morgado *et al*. (1991) e Machado Júnior e Santana Neto (2020).

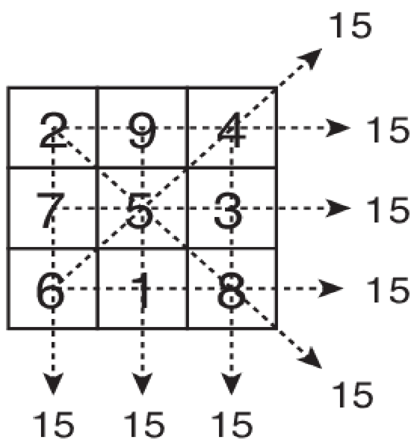
3.1 BREVE HISTÓRICO DA COMBINATÓRIA

Não se sabe ao certo quando surgiram as primeiras ideias relacionadas à Combinatória. Segundo Morgado *et al*. (1991), o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados ao tema. O caso quando $n = 2$, por exemplo, pode ser encontrado nos Elementos de Euclides, em torno de 300 a.C.

Já os demais casos relacionados ao binômio citado anteriormente, como pontua Oliveira (2015), estão intimamente ligados ao Triângulo de Pascal. Este, por sua vez, já era conhecido por Shih-Chieh, na China, por volta de 1300, e antes disso, ele já era popular entre os hindus e árabes.

Porém, de acordo com Wieleitner (1928), a questão mais antiga relacionada à Combinatória é o da formação dos quadrados mágicos. Segundo Oliveira (2015), quadrados mágicos (de ordem n) são grupos ordenados com os números $1, 2, 3, \dots, n^2$ dispostos em um quadrado $n \times n$ de forma que cada linha, coluna ou diagonal deste quadrado possua a mesma soma, conforme consta na Ilustração 3 a seguir.

ILUSTRAÇÃO 3 – QUADRADO MÁGICO 3×3



Fonte: OBI2022.

Um dos primeiros quadrados mágicos conhecidos é o *Lo Shu*, que segundo Needham (1959), data do século I d.C., mas que há chances de ser tão antigo a ponto de haver sido escrito por volta de 2000 a.C. Segundo Vazquez (2011), esse quadrado foi uma revolução para a época, pois naquele período a produção de qualquer aritmética era motivo de euforia.

De acordo com Oliveira (2015), os quadrados mágicos não foram estudados somente pelas suas características místicas e misteriosas. Segundo o autor, diversos foram os matemáticos que se encantaram pelas combinações numéricas e se dedicaram na busca por métodos que levassem a construção destes engenhosos objetos. Segundo Mello (2017, p.19):

> Em 1693 foram apresentados todos os 880 quadrados de ordem 4, pelo matemático francês Frénicle e nesta mesma época seu compatriota, De La Loubère (1691) descreveu um método de construção de quadrados de ordem ímpar conhecido como “método de fronteira”.

De acordo com Vazquez (2011), em 1666, Leibniz descreveu a Combinatória como sendo “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos”, ao passo que Nicholson, em 1818, definiu-a como “o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos pode ser associado e misturado entre si”.

Já de acordo com Morgado *et al*. (1991), a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Segundo o autor:

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução. (MORGADO *et al*. 1991, p.2)

Cotidianamente a Combinatória vem ganhando relevância na nossa sociedade. Segundo Morgado *et al*. (1991), essa importância está relacionada diretamente ao advento da Matemática Discreta, a qual foi impulsionada, principalmente, pelo surgimento das teorias probabilísticas nos jogos de azar.

Conforme Morgado *et al*. (1991), esta área da Matemática é fundamental para o nosso tempo e seu crescimento se dá principalmente pelas muitas aplicações de seus princípios em negócios e para seus vínculos próximo à Ciência da Computação, tais como: algoritmos, linguagens de programação, criptografia e desenvolvimento de softwares.

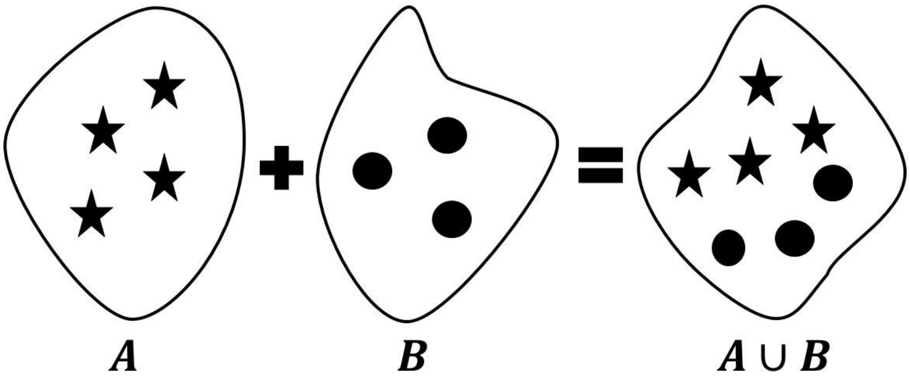
3.2 COMBINAÇÕES E PERMUTAÇÕES

Uma das preocupações básicas da Combinatória, mas não a única, é com os métodos de contagem (MORGADO *et al*. 1991). De acordo com os autores, esses métodos permitem determinar o número de elementos de conjuntos formados de acordo com certas regras, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

Conforme aponta Morgado *et al*. (1991), uma das primeiras técnicas desenvolvidas por uma pessoa é a de "contar", ou seja, enumerar objetos de um certo conjunto a fim de determinar seu total de elementos. Nesse processo, segundo os autores, os alunos aprendem e aplicam as operações aritméticas de maneira empírica e sistêmica.

Uma dessas operações aritméticas que são usualmente introduzidas junto a um problema de contagem é a operação da adição. Tal operação é tão usual, que figura como sendo um dos princípios básicos de contagem, denominado *Princípio Aditivo*, o qual está esboçado na Ilustração 4 adiante.

ILUSTRAÇÃO 4 – REPRESENTAÇÃO DO PRINCÍPIO ADITIVO



Fonte: elaborada pelo autor.

Tal princípio fala o seguinte: *Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então A ∪ B possui* $p + q$ *elementos.*

Além do Princípio Aditivo, há um outro, denominado *Princípio Multiplicativo*, ou *Princípio Fundamental da Contagem*. Para enunciá-lo, tomaremos como base o exemplo adiante. Numa festa há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal contendo um homem e uma mulher?

Chamando os homens de h_1, h_2, h_3, e as mulheres de m_1, m_2, m_3, m_4, pode-se notar que é possível formar 4 casais nos quais o homem é h_1, 4 nos quais o homem é h_2, e outros 4 nos quais o homem é h_3. Logo, será possível selecionar: $4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3 = 12$ casais.

O Princípio Fundamental da Contagem diz que: *se uma decisão d_1 puder ser tomada de x_1 maneiras, uma decisão d_2 puder ser tomada de x_2 maneiras,..., uma decisão d_n puder ser tomada de x_n maneiras, sendo as decisões todas sucessivas, então o número de maneiras de se tomar as decisões $d_1, d_2, \ldots, d_n$ será o produto entre elas, ou seja, $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$.*

No exemplo anterior, tomar a decisão d_1 era equivalente à escolha do homem, e a decisão d_2 seria relativa à escolha da mulher. Como d_1 poderia ser tomada de 3 maneiras e, após tomá-la, d_2 poderia ser tomada de 4 maneiras, então o número de maneiras de se formar um casal seria: $|d_1| \cdot |d_2| = 3 \cdot 4 = 12$ maneiras, sendo $|d_1|$ e $|d_2|$ as possibilidades de escolhas do homem e da mulher, respectivamente.

Conforme pontua Morgado *et al*. (1991), é muito comum os alunos ficarem confusos ao tentarem resolver alguns problemas de contagem que, à primeira vista, pareciam ser fáceis. Segundo os autores, isso ocorre devido à não observância de três passos iniciais para uma resolução adequada de um problema de contagem, os quais listaremos a seguir.

Postura: inicialmente, segundo os autores, devemos sempre nos colocar no papel de quem vai fazer a ação solicitada pelo problema e analisar as decisões a serem tomadas. No exemplo dos casais enunciado anteriormente, nós nos colocamos no lugar da pessoa que iria formar os casais solicitados pelo problema.

Divisão: posteriormente, de acordo com os autores, devemos, sempre que for possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. No exemplo dos casais listado anteriormente, dividimos a decisão de formar um casal em duas decisões mais simples, que foi a de escolher um homem e a de escolher uma mulher.

Não adiar dificuldades: por fim, conforme os autores, não devemos adiar os impasses encontrados, pois pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em grandes dificuldades. Caso uma das decisões a serem tomadas seja mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Conforme aponta Morgado *et al.* (1991), o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo, aliados a esses três passos listados anteriormente, configuram a base dos problemas de contagem abordados na Educação Básica. Nesse sentido, não abordaremos neste trabalho os conceitos de arranjos, pois entendemos que eles são aplicações diretas do Princípio Fundamental da Contagem.

Porém, os autores ponderam que existem outros problemas que, embora sejam aplicações desses princípios, têm algumas particularidades e valem a pena serem estudados em específico, como as Permutações Simples, Permutações com Repetições, Permutações Circulares e Combinações Simples.

Além disso, há alguns métodos que nem sequer são explorados na Educação Básica, como o Princípio das Gavetas de Dirichlet, Princípio da Inclusão-Exclusão e Combinações Completas. Concordamos com Morgado *et al.* (1991) ao defenderem a exploração de tais problemas em sala com os alunos. Sendo assim, abordaremos cada um deles adiante.

3.2.1 Permutações Simples

Permutações Simples de n elementos distintos são os agrupamentos ordenados, que diferem pela ordem, formados com esses n elementos. Essas reordenações estão diretamente ligadas à formação de filas, listas, bijeções[2], dentre outras coisas. Por exemplo, de quantas formas podemos ordenar distintamente as letras *ABC*?

Podemos ordená-las da seguinte forma: (*ABC), (ACB), (BAC), (BCA), (CAB), (CBA).* De maneira geral, para organizar n objetos distintos, temos n possibilidades para a primeira escolha, $(n-1)$ para a segunda, $(n-2)$ para a terceira, e assim por diante, até a última escolha, na qual teremos 1 possibilidade.

Como devemos tomar decisões sucessivas, o Princípio Fundamental da Contagem nos permite multiplicar o número de possibilidades de cada uma delas. Assim, o número de Permutações Simples de n objetos distintos é dado por:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Pela definição de fatorial, temos que $0! = 1$ e $1! = 1$. Logo, $P_0 = 1$ e $P_1 = 1$. Vejamos adiante algumas situações bastante recorrentes em Permutações Simples, que é encontrar o número de anagramas de uma determinada palavra.

Entende-se por anagrama de uma determinada palavra qualquer permutação realizada com suas letras, ainda que esta ordenação não tenha sentido algum. Por exemplo, TOPA é um anagrama de PATO, assim como PTOA, sendo que esta última não é uma palavra encontrada no dicionário.

Exemplo 3.2.1.1: Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO?

Solução: Como PRÁTICO possui 7 letras distintas, o número de anagramas que essa palavra possui é:

[2] Bijeção, ou correspondência biunívoca, é uma relação um a um entre elementos de um conjunto A e um conjunto B, em que cada elemento de A corresponde sempre a um único elemento de B, e reciprocamente.

$$P_7 = (7-1) \cdot (7-2) \cdot \ldots \cdot 1 = 7! = 5040.$$

Portanto, a palavra PRÁTICO possui 5040 anagramas possíveis. Vejamos a seguir o mesmo exemplo, mas com algumas restrições no seu enunciado.

Exemplo 3.2.1.2: Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO que começam e terminam por consoante?

Solução: Seguindo os passos iniciais para uma boa resolução, devemos começar pelas restrições. Neste problema, temos duas restrições, que são as escolhas da letra inicial e final. A consoante inicial pode ser escolhida de 4 maneiras e, uma vez escolhida a primeira, a segunda poderá ser escolhida de 3 maneiras. As outras 5 letras restantes podem ser ordenadas de $P_5 = 5!$ modos. Assim, o número de anagramas desta palavra, com essas restrições, é:

$$4 \cdot 3 \cdot P_5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440.$$

Adiante veremos outras aplicações desse método de contagem, o qual é bastante interessante de se usar em sala sem a necessidade de ficar preso a fórmulas.

Exemplo 3.2.1.3: De quantos modos podemos arrumar em fila 5 livros diferentes de Matemática, 3 livros diferentes de Estatística e 2 livros diferentes de Física, de modo que livros de uma mesma matéria permaneçam juntos?

Solução: Neste problema temos de organizar tanto os livros, que são distintos, quanto também a ordem das matérias. Podemos escolher a ordem das matérias de $P_3 = 3!$ modos. Para as escolhas dos livros de Matemática, temos $P_5 = 5!$ maneiras. Para as escolhas dos livros de Estatística, temos $P_3 = 3!$ modos disponíveis. Por fim, para os de Física, temos $P_2 = 2!$ maneiras possíveis. Como são decisões sucessivas, utilizaremos o Princípio Fundamental da Contagem. Assim, temos:

$$P_3 \cdot P_5 \cdot P_3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8640.$$

Portanto, tais livros poderão ser arrumados em fila de 8640 modos distintos, seguindo essas restrições.

Até então estávamos utilizando raciocínios construtivos para resolver os problemas. Contudo, veremos a seguir casos em que alguns elementos das permutações realizadas se repetem, e para resolver tais problemas, utilizaremos o que Morgado *et al.* (1991) denominam de raciocínio destrutivo, que significa contar elementos a mais e depois corrigir as contagens.

3.2.2 Permutações com Repetições

Permutações com Repetições são ordenações de objetos em que nem todos são distintos, ou seja, alguns deles se repetem na ordenação. Quando isso acontece, deve-se corrigir a contagem desses elementos, como veremos no exemplo adiante. Quantos são os anagramas da palavra TATU?

Se todas as letras fossem distintas, a resposta seria $P_4 = 4! = 24$. Porém, temos duas letras T iguais, e ao permutá-las, obteremos o mesmo anagrama. Para ilustrar melhor tal exemplo, iremos diferenciar as duas letras T da palavra, chamando-as de T_1 e T_2. Nesse caso, a palavra seria T_1AT_2U. Caso fossem diferentes, teríamos o seguinte:

TABELA 2 – REPRESENTAÇÃO DAS PERMUTAÇÕES REPETIDAS

(A, T_1, T_2, U) (A, T_2, T_1, U)	(T_1, T_2, U, A) (T_2, T_1, U, A)	(U, T_1, T_2, A) (U, T_2, T_1, A)	(T_2, A, T_1, U) (T_1, A, T_2, U)
(A, U, T_1, T_2) (A, U, T_2, T_1)	(T_1, U, A, T_2) (T_2, U, A, T_1)	(U, T_1, A, T_2) (U, T_2, A, T_1)	(T_2, A, U, T_1) (T_1, A, U, T_2)
(A, T_1, U, T_2) (A, T_2, U, T_1)	(T_1, U, T_2, A) (T_2, U, T_1, A)	(U, A, T_1, T_2) (U, A, T_2, T_1)	(T_2, T_1, A, U) (T_1, T_2, A, U)

Fonte: adaptada de Franco (2020, p.42).

Considerando $T_1 \neq T_2$, podemos notar que cada quadro da Tabela 2, que representa uma classe de equivalência, possui 2 anagramas, totalizando 24. Porém, cada anagrama foi contado duas vezes em cada classe, uma vez que T_1 e T_2 são iguais.

Os anagramas em vermelho são os que se repetem em cada classe. Nesse caso, o número total de anagramas da palavra TATU será 12, pois teremos de retirar de cada anagrama as permutações feitas entre as letras T, ou seja, dividir o resultado por 2!.

De maneira geral, se temos n objetos, sendo j_1 objetos iguais do tipo 1, j_2 objetos iguais do tipo 2,..., e j_k objetos iguais do tipo k, e tomando que $j_1 + j_2 + \ldots + j_k = n$, então o número de permutações desses n elementos é dado por:

$$\binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_k} = \frac{n!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_k!}.$$

No exemplo anterior nós dividimos $P_4 = 24$ por 2!, pois a letra T se repetiu duas vezes. Caso ela se repetisse três vezes, deveríamos dividir por 3!, e assim por diante, para cada letra ou objeto que se repetir ao ser permutado. Veremos adiante mais alguns exemplos.

Exemplo 3.2.2.1: Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?

Solução: Podemos notar que a letra A se repete 3 vezes, a letra M e a letra T repetem-se 2 vezes cada. As letras restantes não se repetem, ou seja, temos 1 letra E, 1 letra I e 1 letra C. Logo, temos que a palavra MATEMÁTICA tem

$$\binom{10}{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200$$

anagramas. Veremos a seguir um exemplo parecido, mas com algumas restrições de resolução.

Exemplo 3.2.2.2: Quantos são os anagramas da palavra URUGUAI que começam por vogal?

Solução: Como já vimos anteriormente, quando se tem uma restrição em um problema, devemos sempre começar por ela. Neste caso, devemos primeiro fazer a escolha da letra inicial, que deverá ser uma vogal. Temos 3 vogais U, 1 vogal A e 1 vogal I. No total temos 7 letras. Se a primeira vogal for U, teremos de permutar as outras 6 letras com duas vogais U se repetindo, ou seja:

$$\binom{6}{2,1,1,1,1} = \frac{6!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 360.$$

Caso a primeira vogal seja A ou I, teremos de permutar as outras 6 letras com três letras U se repetindo, ou seja:

$$2 \cdot \binom{6}{3,1,1,1} = 2 \cdot \left(\frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}\right) = 240.$$

Pelo Princípio Aditivo, deveremos somar as possibilidades, ou seja, teremos

$$360 + 240 = 600$$

anagramas dessa palavra que começam por vogais.

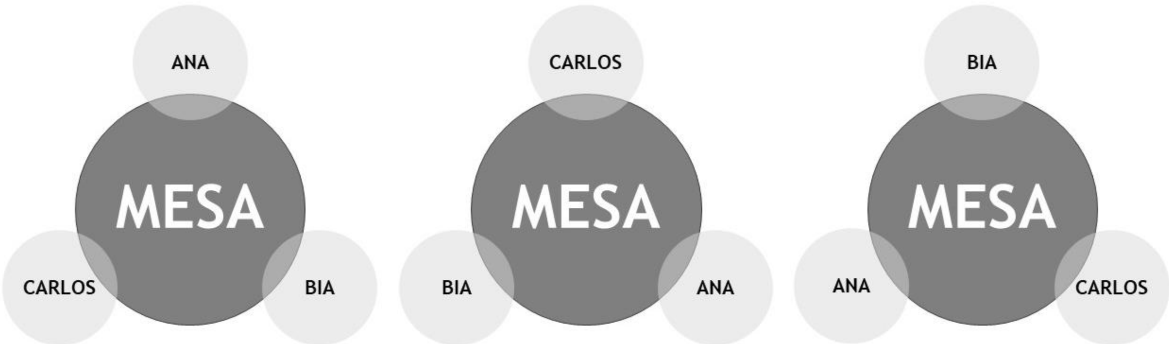
Podemos notar, através desse último exemplo, que em problemas de contagem algumas situações que aparentam ser simples podem na verdade esconder grandes dificuldades, caso o aluno fique preso a raciocínios mecânicos.

3.2.3 Permutações Circulares

Permutações Circulares ocorrem quando temos um grupo com n objetos distintos dispostos em uma curva simples fechada[3], e a ordem em relação ao outro importa. Porém, não há um início ou um fim, ou seja, "girar" os elementos em torno desta curva não gera uma nova permutação. Para ilustrar melhor essa ideia, tomaremos como base o seguinte problema: de quantas maneiras podemos organizar 3 pessoas em torno de uma mesa redonda?

As repetições, nesses tipos de problemas, são das próprias arrumações, visto que as pessoas são únicas e não se repetem, como podemos ver na Ilustração 5 adiante. Chamando as pessoas de Ana, Bia e Carlos, e girando elas 3 vezes em torno da mesa, temos:

ILUSTRAÇÃO 5 – REPRESENTAÇÃO DAS PERMUTAÇÕES CIRCULARES



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos notar que, embora as pessoas estejam dispostas em locais diferentes, a formação continua a mesma. Se olharmos no sentido horário, por exemplo, Ana continua tendo do seu lado esquerdo Bia e do seu lado direito Carlos, nas três disposições. Logo, em cada permutação realizada, apenas uma pode ser contabilizada, e no caso do exemplo anterior, as três pessoas poderão ser dispostas de 2 maneiras distintas apenas.

Se pudéssemos considerar disposições coincidentes pela rotação, teríamos $n!$ disposições. Porém, cada Permutação Circular é gerada por n disposições, e nesse caso, devemos corrigir cada permutação dividindo pelo número de disposições equivalentes obtidas por rotação. Assim, o número de Permutações Circulares de n elementos é dado por:

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

[3] Curvas simples fechadas são todas as curvas que não têm auto intersecção, exceto nos pontos inicial e final. Optamos por utilizar tal conceito, pois torna a definição de Permutação Circular mais genérica.

Observação 3.2.3.1: Nos problemas de Permutações Circulares não devemos levar em consideração referências externas, tendo em vista que o que importa, de fato, são as posições relativas dos objetos entre si.

No exemplo anterior, tínhamos 3 pessoas, e ao apenas girá-las em torno da mesa 3 vezes, obtivemos as mesmas disposições. Nesse caso, a correção na contagem seria dividir pelo número de pessoas a serem permutadas. Veremos adiante um exemplo mais complexo.

Exemplo 3.2.3.1: De quantos modos podemos posicionar 6 pessoas em uma roda, dentre elas João e Maria, de modo que João e Maria fiquem sempre um do lado do outro?

Solução: Como João e Maria devem estar juntos, podemos pensar como se eles fossem uma única pessoa. Assim, ao invés de 6, iremos organizar 5 blocos de pessoas, ou seja, temos

$$(PC)_5 = (5-1)! = 4! = 24$$

maneiras de realizar esta tarefa. Porém, como João e Maria podem se permutar entre si de 2! modos, devemos contar esses casos também. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos

$$2! \cdot 24 = 2 \cdot 1 \cdot 24 = 48$$

maneiras distintas de organizar essas 6 pessoas, dentre elas João e Maria, e que eles fiquem sempre lado a lado.

Problemas como este evidenciam a necessidade de atenção ao resolvê-los, pois simples detalhes podem levar a soluções totalmente equivocadas.

3.2.4 Combinações Simples

Combinações Simples são subconjuntos formados com p elementos de um conjunto com n elementos, sendo $0 \leq p \leq n$. Para facilitar o raciocínio, tomaremos como base o seguinte problema: de quantas maneiras podemos escolher uma comissão com três estudantes dentre os cinco que estão disputando?

Chamaremos essas 5 pessoas de A, B, C, D, E. Para a escolha de uma comissão a ordem não importa, ou seja, a comissão formada pelas pessoas (A, B, C) é idêntica à comissão formada pelas pessoas (A, C, B) ou (B, A, C), por exemplo. A tabela 3 adiante ilustra todas as possíveis comissões, e colorimos de vermelho as repetidas no processo.

TABELA 3 – REPRESENTAÇÃO DAS COMISSÕES

(A, B, C)	(A, B, D)	(A, B, E)	(A, C, D)	(A, C, E)
(A, C, B)	(A, D, B)	(A, E, B)	(A, D, C)	(A, E, C)
(B, A, C)	(B, A, D)	(B, A, E)	(C, A, D)	(C, A, E)
(B, C, A)	(B, D, A)	(B, E, A)	(C, D, A)	(C, E, A)
(C, A, B)	(D, A, B)	(E, A, B)	(D, A, C)	(E, A, C)
(C, B, A)	(D, B, A)	(E, B, A)	(D, C, A)	(E, C, A)
(A, D, E)	(B, C, D)	(B, C, E)	(B, D, E)	(C, D, E)
(A, E, D)	(B, D, C)	(B, E, C)	(B, E, D)	(C, E, D)
(D, A, E)	(C, B, D)	(C, B, E)	(D, B, E)	(D, C, E)
(D, E, A)	(C, D, B)	(C, E, B)	(D, E, B)	(D, E, C)
(E, A, D)	(D, B, C)	(E, B, C)	(E, B, D)	(E, C, D)
(E, D, A)	(D, C, B)	(E, C, B)	(E, D, B)	(E, D, C)

Fonte: adaptada de Franco (2020, p.52).

Nota-se, em cada quadro da Tabela 3, que as comissões de um mesmo bloco são as mesmas, e, portanto, não são 60. Isso ocorre porque cada comissão foi contada uma vez para cada ordem das pessoas do grupo a ser formado, ou seja, cada comissão foi contada 6 vezes. Nesse caso, devemos corrigir a contagem dividindo o resultado total pela quantidade de vezes que cada comissão se repetiu, ou seja, por 6. Assim, teremos 10 comissões no total.

De maneira geral, selecionar p, dentre os n elementos disponíveis, equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, que são os selecionados, e um grupo de $(n-p)$ objetos, que são os não selecionados. Assim, escolher p elementos dentre n, com $0 \leq p \leq n$, que é o número de Combinações Simples, é igual a:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Observação 3.2.4.1: Para $0 \leq n < p$ inteiros, define-se que $\binom{n}{p} = 0$, pois não se pode escolher um número de objetos maior dentre os que se têm disponíveis.

As Combinações Simples estão diretamente ligadas à ideia de Conjuntos, tendo em vista que nas disposições dos objetos a ordem entre eles não importa. Adiante veremos alguns exemplos para ilustrar melhor tais ideias.

Exemplo 3.2.4.1: Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar, se dispomos de 10 frutas diferentes?

Solução: Note que, embora as frutas sejam diferentes, a ordem da escolha entre elas não influencia na formação da salada. Esse é um problema clássico de Combinação Simples, em que a ordem da escolha dos elementos não importa. Nesse sentido, teremos

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = 210$$

possibilidades para escolher 4 frutas, dentre 10 disponíveis.

Exemplo 3.2.4.2: Uma empresa é formada por 6 sócios brasileiros e 4 sócios japoneses. De quantos modos podemos formar uma diretoria de 5 sócios, sendo 3 brasileiros e 2 japoneses?

Solução: Ao invés de tomar uma única decisão diretamente, que é formar uma diretoria de 5 sócios contendo 3 brasileiros e 2 japoneses, poderemos escolher cada uma separadamente e depois juntá-las.

Para contar a quantidade de escolhas de 3 brasileiros, dentre 6 disponíveis, poderemos fazer uma Combinação Simples, ou seja, teremos

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 20$$

maneiras de realizar a escolha.

Para contar a quantidade de escolhas de 2 japoneses, calcularemos também uma Combinação Simples de 2, dentre os 4 disponíveis, ou seja, teremos

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = 6$$

maneiras de realizar a tarefa.

Por serem decisões sucessivas, na qual devemos escolher brasileiros e japoneses, usaremos o Princípio Multiplicativo. Assim, teremos

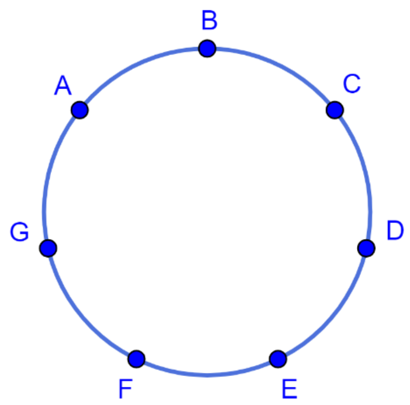
$$20 \cdot 6 = 120$$

maneiras de formar uma comissão com 3 brasileiros, dentre 6 disponíveis, e 2 japoneses, dentre 4 disponíveis.

Veremos, a seguir, um problema um pouco mais sofisticado envolvendo Combinações Simples.

Exemplo 3.2.4.3: Sobre uma circunferência tomam-se 7 pontos distintos, conforme mostra a Ilustração 6 abaixo. Calcule o número de polígonos convexos que se pode obter com vértices nos pontos dados sobre esta circunferência.

ILUSTRAÇÃO 6 – OS SETE PONTOS SOBRE A CIRCUNFERÊNCIA



Fonte: elaborada pelo autor.

Solução: Como são sete pontos, o polígono com mais lados que podemos formar é um heptágono, e o com menos lados um triângulo. Para cada polígono a se formar, poderemos fazê-lo por meio de uma Combinação Simples. Assim, para as formações dos triângulos, temos

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = 35$$

maneiras.

Para as formações dos quadriláteros, temos

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = 35$$

maneiras.

Para as formações dos pentágonos, temos

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot (7-5)!} = 21$$

maneiras.

Para as formações dos hexágonos, temos

$$\binom{7}{6} = \frac{7!}{6! \cdot (7-6)!} = 7$$

maneiras.

E por fim, para o heptágono, temos

$$\binom{7}{7} = \frac{7!}{7! \cdot (7-7)!} = 1$$

maneira.

Como não são decisões simultâneas, ou seja, são disjuntas, o Princípio Aditivo nos permite somar as possibilidades. Assim, temos

$$35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 99$$

maneiras de formar polígonos convexos com 7 pontos dispostos em uma circunferência.

Esses foram alguns, dentre os vários exemplos e aplicações dos métodos tradicionais de Contagem. Adiante veremos outros métodos não tão comuns, mas que abordam situações bem interessantes e que merecem atenção.

3.3 OUTRAS TÉCNICAS DE CONTAGEM

Nesta sessão abordaremos alguns métodos que não são mostrados com frequência na Educação Básica, mas merecem atenção, por propiciarem situações específicas e que, muitas vezes, desafiam os alunos em suas resoluções. Além disso, são métodos totalmente viáveis por serem facilmente aplicados no cotidiano, que é o foco principal deste trabalho.

3.3.1 O Princípio da Inclusão-Exclusão

Foi apresentado no início da Sessão 3.2 o Princípio Aditivo. Esse princípio, segundo Morgado *et al*. (1991), estabelece que o número de elementos da união de dois conjuntos disjuntos é a soma dos elementos de cada conjunto.

O Princípio da Inclusão-Exclusão é a generalização do Princípio Aditivo, haja vista que ele relaciona a soma à união de vários conjuntos finitos não necessariamente disjuntos. Na sua versão mais básica, associando apenas dois conjuntos, sendo eles A e B, temos que:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Observação 3.3.1.1: A notação "$|\ \ |$" representa a cardinalidade de um conjunto, ou seja, o número de elementos de um determinado conjunto.

Observação 3.3.1.2: O símbolo $\cup$ representa a união entre conjuntos e o símbolo $\cap$ representa a interseção entre eles.

Em termos gerais, para dois conjuntos finitos A e B não necessariamente disjuntos, o número de elementos da união entre eles será igual ao número de elementos de A somado ao número de elementos de B subtraído o número de elementos em comum entre A e B.

Devemos fazer essa subtração dos elementos em comum, pois caso contrário, estaríamos contando-os duas vezes seguidas. Vejamos a justificativa a seguir.

Justificativa: Vamos supor que existem y elementos em comum entre os conjuntos A e B, e que, além disso, existem x elementos que pertencem somente ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B, assim como existem z elementos que pertencem somente ao conjunto B e não pertencem ao conjunto A. Queremos mostrar que

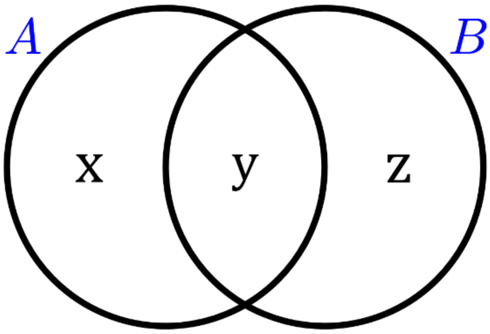
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= x + y + z \\ &= (x + y) + (z + y) - y \\ &= |A| + |B| - |A \cap B|, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar, conforme a Ilustração 7, com a justificativa através do Diagrama de Venn.[4]

ILUSTRAÇÃO 7 – DIAGRAMA DE VENN PARA ($A \cup B$).



Fonte: Adaptada de sagectu.

Exemplo 3.3.1.1: Numa pesquisa com jovens, foram feitas as seguintes perguntas para que respondessem sim ou não: gosta de exatas? Gosta de humanas? 80 jovens responderam sim à primeira pergunta, 60 jovens responderam sim à segunda e 15 jovens responderam sim a ambas as perguntas. Quantos jovens foram entrevistados?

Solução: Definindo E como o conjunto dos jovens entrevistados que gostam de exatas e definindo H como o conjunto dos jovens entrevistados que gostam de humanas, temos

$$|E| = 80,\ |H| = 60 \text{ e } |E \cap H| = 15.$$

Dessa forma, calculando $|E| + |H|$, o número de alunos que gostam de ambas as áreas seria contado duas vezes. Assim, para fazer essa correção, deve-se subtrair essa contagem dupla. Logo, pode-se concluir que foram entrevistados

$$|E \cup H| = |E| + |H| - |E \cap H| = 80 + 60 - 15 = 125$$

jovens nessa pesquisa.

---

[4] É a forma de representar graficamente as relações de contingência entre determinados conjuntos. Ele é composto por curvas simples fechadas sobrepostas em que cada uma delas representa um conjunto.

Portanto, para dois conjuntos não necessariamente disjuntos, vale a versão do Princípio listada acima.

Veremos a seguir o Princípio da Inclusão-Exclusão para a união de elementos de três conjuntos finitos não necessariamente disjuntos. Nesse sentido, sendo A, B, C três conjuntos não necessariamente disjuntos, tem-se que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Em termos gerais, para três conjuntos finitos A, B, C não necessariamente disjuntos, a quantidade de elementos da união entre eles será o número de elementos de A somado ao número de elementos de B somado ao número de elementos de C, subtraído o número de elementos em comum dos conjuntos tomados dois a dois, somado o número de elementos comuns aos três conjuntos.

Justificativa: Inicialmente, consideremos $(A \cup B)$ como sendo um único conjunto. Nesse sentido, temos que

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\ &= |(A \cup B)| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |(A \cup B) \cap C|. \end{aligned}$$

Aplicando o Princípio da Inclusão-Exclusão para dois conjuntos finitos na igualdade abaixo, obtemos que

$$\begin{aligned} |(A \cup B) \cap C| &= |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |(A \cap C)| + |(B \cap C)| - |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

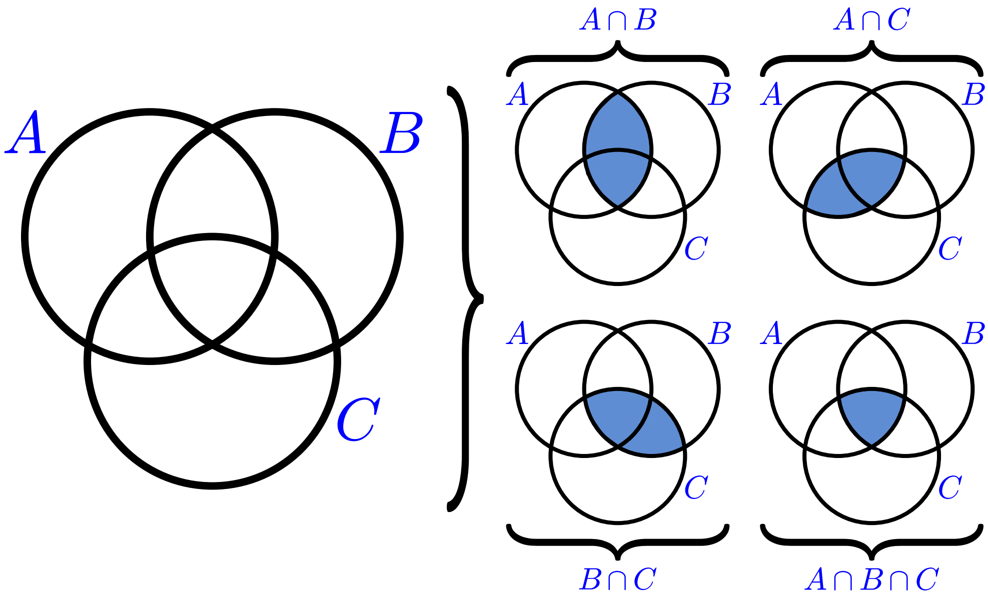
Assim, juntando esse resultado à expressão anterior e aplicando a propriedade distributiva, concluímos que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

como queríamos mostrar.

Vejamos a seguir, na Ilustração 8, a justificativa através do Diagrama de Venn.

ILUSTRAÇÃO 8 – DIAGRAMA DE VENN PARA ($A \cup B \cup C$).



Fonte: Sagectu.

Exemplo 3.3.1.2: Determine quantos são os números entre 1 e 1000 (incluindo 1 e 1000) que são múltiplos de 2, 5 ou 7.

Solução: Sejam

$A = \{2,4,6, \dots ,1000\}$ o conjunto dos múltiplos de 2 que são menores ou iguais a 1000,
$B = \{5,10,15, \dots ,1000\}$ o conjunto dos múltiplos de 5 que são menores ou iguais a 1000,
$C = \{7,14,21, \dots ,994\}$ o conjunto dos múltiplos de 7 que são menores ou iguais a 1000.

Queremos calcular $|A \cup B \cup C|$. Porém, não devemos utilizar o Princípio Aditivo, pois os conjuntos não são disjuntos. Assim, usaremos o Princípio da Inclusão-Exclusão para três conjuntos, que foi mostrado anteriormente.

Sabe-se que o número de múltiplos de um certo número k de 1 a 1000 é igual a $\left\lfloor \frac{1000}{k} \right\rfloor$, onde "$\lfloor \ \rfloor$" representa a função piso, ou seja, $\lfloor x \rfloor$ retorna o maior inteiro menor ou igual a x. Um exemplo disso é que $\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = \lfloor 1,5 \rfloor = 1$. Assim, tem-se que

$$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500,$$

$$|B| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200,$$

$$|C| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142.$$

Além disso, como $A \cap B$ é o conjunto dos múltiplos de 10, $A \cap C$ o conjunto dos múltiplos de 14, $B \cap C$ o conjunto dos múltiplos de 35 e $A \cap B \cap C$ o conjunto dos múltiplos de 70, temos

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100,$$
$$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{14} \right\rfloor = 71,$$
$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor = 28,$$
$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{70} \right\rfloor = 14.$$

Aplicando o Princípio da Inclusão-Exclusão para três conjuntos, obtemos

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 500 + 200 + 142 - 100 - 71 - 28 + 14 = 657 \end{aligned}$$

múltiplos de 2, 5 ou 7 entre 1 e 1000, incluindo 1 e 1000.

Para generalizar essa ideia, sendo $A_1, A_2, \dots, A_n$ conjuntos finitos, o número de elementos de

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

é dado por

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2}\right| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

O próprio nome do Princípio já o define, Inclusão-Exclusão, pois o processo é sempre o mesmo. Inclui-se os elementos dos conjuntos tomados um a um, exclui-se os elementos em comum dos conjuntos tomados dois a dois, inclui-se os elementos em comum dos conjuntos tomados três a três, e assim por diante.

Observação 3.3.1.3: Sendo n o número de conjuntos a serem relacionados, se n for par, começa-se incluindo e termina-se excluindo. Se n for ímpar, começa-se incluindo e termina-se incluindo.

3.3.2 Combinações Completas

Combinações Completas, ou Combinações com Repetições, são agrupamentos não ordenados formados com p elementos de um conjunto com n elementos, sendo $0 < p \leq n$, podendo os elementos serem escolhidos repetidamente até que se obtenha a quantidade p.

Para facilitar o raciocínio, tomaremos como base o seguinte problema: de quantos modos é possível comprar 6 sorvetes em uma loja que oferece 4 sabores, supondo que, de cada sabor, estejam disponíveis pelo menos 6 unidades?

Resolver esse problema é o mesmo que encontrar o número de soluções, em inteiros não negativos, da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6,$$

com $x_i \geq 0$ e que x_i, com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, representa a quantidade de sorvetes de cada sabor i.

Essa equação pode ser interpretada de tal forma que, encontrar o seu número de soluções será o mesmo que calcular o número de permutações com repetições de uma sequência de dois tipos de elementos, que veremos a seguir.

Como ilustração, usaremos uma barra vertical para representar cada unidade a mais em x_i e um sinal de soma para separá-los. Assim, faremos uma bijeção entre cada escolha possível e uma configuração de barras verticais e sinais de soma. A exemplo, a solução

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2, x_3 = 2\ \ x_4 = 1$$

é representada por

$$| + || + || + |$$

e denota um sorvete do sabor 1, dois sorvetes do sabor 2, dois sorvetes do sabor 3 e um sorvete do sabor 4.

Como há uma bijeção entre cada escolha possível e uma configuração de barras verticais e sinais de soma, conclui-se que cada permutação desses elementos é uma solução da equação acima, assim como cada solução dessa equação pode ser representada por essas mesmas barras verticais e sinais de soma.

Nesse sentido, teremos de calcular uma permutação com repetição de 9 objetos no total, entre barras verticais e sinais de soma, sendo 6 barras e 3 sinais. Assim, teremos

$$\binom{9}{6,3} = \frac{9!}{6!\,3!} = 84$$

possibilidades de comprar esses 6 sorvetes nessas condições.

De maneira geral, o número de maneiras de se escolher p objetos, dentre n tipos de objetos possíveis é igual a

$$\left(\binom{n}{p}\right) = \frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!}.$$

Observação 3.3.2.1: Notação extraída de Franco (2020, p.71). Analogamente ao exemplo anterior, assume-se implicitamente que há pelo menos p objetos disponíveis de cada tipo.

Justificativa: Do exemplo anterior, denota-se que cada possível escolha corresponde a uma solução, em inteiros não negativos, da equação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p,$$

em que x_i indica o número de elementos do tipo i escolhidos. Assim, para calcular o número de soluções da equação acima, fazemos uma bijeção com o conjunto das permutações com repetições de p barras verticais e $(n-1)$ sinais de soma, cuja quantidade total é dada por

$$\binom{p+n-1}{p} = \frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!},$$

e com a notação utilizada acima, temos

$$\left(\binom{n}{p}\right) = \frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!}.$$

Observação 3.3.2.2: Combinação Simples é utilizada quando queremos descobrir o total de maneiras de se escolher p objetos dentre n objetos distintos. Já Combinação Completa é utilizada quando queremos descobrir o total de maneiras de se escolher p objetos dentre n tipos de objetos disponíveis.

Exemplo 3.3.2.1: Determine o número de maneiras que podemos distribuir seis laranjas entre três pessoas.

Solução: Para facilitar o raciocínio, chamaremos essas três pessoas de a, b e c. Assim, encontrar o total de distribuições dessas laranjas será equivalente a encontrar o número de soluções distintas, em inteiros não negativos, da equação $a + b + c = 6$.

Utilizando aquela ideia das bijeções das configurações de barras verticais e sinais de soma com cada solução, teremos uma permutação (com repetição) de seis barras verticais com dois sinais de soma. Como exemplo, a configuração

$$|| + ||| + |$$

representa a solução $(2,3,1)$, ou seja, duas laranjas para a pessoa a, três laranjas para a pessoa b e uma laranja para a pessoa c.

Nesse sentido, teremos de calcular uma permutação com repetição de 8 elementos no total, entre barras verticais e sinais de soma, sendo 6 barras e 2 sinais, ou seja, teremos

$$\binom{8}{6,2} = \frac{8!}{6!\,2!} = 28$$

maneiras de distribuir essas seis laranjas entre essas três pessoas.

Caso quiséssemos fazer diretamente pela fórmula geral, sendo $n = 3$ e $p = 6$, teríamos como resultado as mesmas

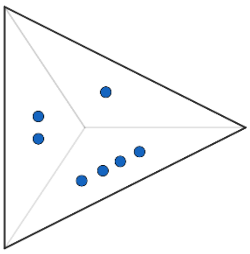
$$\left(\binom{3}{6}\right) = \frac{(6+3-1)!}{6!\,(3-1)!} = \frac{8!}{6!\,2!} = 28$$

maneiras de distribuição desses elementos.

Veremos a seguir um problema um pouco mais complexo envolvendo esses conceitos abordados até o momento.

Exemplo 3.3.2.2: (UFPE – adaptada) Semelhante ao dominó, mas feito de pedras triangulares equiláteras, o jogo de trominó apresenta na face triangular superior um certo número de pontos com repetições, escolhidos de 1 a n, dispostos ao longo de cada aresta, conforme podemos ver um exemplo na Ilustração 9 a seguir.

ILUSTRAÇÃO 9 – UMA DAS PEÇAS COM VALORES 1, 2 E 4.



Fonte: elaborada pelo autor.

Supondo $n = 6$, determine o número total de peças que há neste trominó.

Solução: Nota-se que, pela Ilustração 9, os números estão em disposição “circular” na peça. Nesse sentido, há três tipos de peças, sendo elas:

Tipo 1: Todos os lados com o mesmo valor. Neste caso, cada peça pode ser formada de apenas uma única forma.

Tipo 2: Dois lados possuem um mesmo valor e o terceiro lado possui um valor diferente. Nesta situação, cada peça pode ser formada de uma única forma, pois é a quantidade de Permutações Circulares de dois elementos.

Tipo 3: Cada lado possui um valor diferente. Neste caso, cada peça pode ser formada de duas formas, pois o número de permutações circulares com 3 elementos é 2.

Inicialmente, vamos contar como se em cada tipo, as peças só pudessem ser formadas de uma única forma. Posteriormente, acrescentaremos a quantidade de peças do terceiro tipo que ficará faltando nessa contagem inicial.

Teremos de escolher os valores de cada um dos 3 lados de cada peça do trominó. Como os valores vão de 1 até 6 e são 3 lados, o número de peças do trominó (sem contar as permutações circulares) para $n = 6$ é o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3,$$

que é, no total,

$$\left(\binom{6}{3}\right) = \frac{(3+6-1)!}{3!\,(6-1)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56.$$

Para as peças do tipo 3 que faltam, como os três valores são diferentes, temos 6 opções de valores para escolher 3 e para cada escolha, temos duas formas de organizar na peça do trominó. Assim, fazendo uma Combinação Simples com esses valores, obtemos

$$2 \cdot \binom{6}{3} = 2 \cdot \left(\frac{6!}{3!\,(6-3)!}\right) = 40.$$

Como a metade das peças do tipo 3 já foram contadas uma vez pela Combinação Completa, somaremos as 20 restantes a esse resultado. Assim, pelo Princípio Aditivo, o número de peças desse trominó é a soma dos três tipo de peças elencadas acima, ou seja,

$$tipo\ 1 + tipo\ 2 + tipo\ 3 = 56 + 20 = 76$$

peças no total, supondo que $n = 6$.

3.3.3 O Princípio das Gavetas de Dirichlet

O Princípio das Gavetas de Dirichlet, ou Princípio das Casas dos Pombos, é um argumento matemático que pode ser aplicado a muitos problemas formais, incluindo aqueles que envolvem um conjunto infinito. Em sua versão mais simples, temos que *se $n+1$ pombos estão em n casas, então há pelo menos uma casa com pelo menos dois pombos.*

Uma tradução para esse enunciado é que, sendo A e B dois conjuntos finitos tais que $|A| > |B|$, então não existe nenhuma função injetiva $f : A \longrightarrow B$. Essa versão é bastante intuitiva e de fácil compreensão, embora tenha alguns problemas mais complexos que a envolvem. Veremos a seguir uma generalização para este princípio.

Princípio das Casas dos Pombos: *sendo $k, r \geq 1$, se $kn + r$ pombos estão em n casas, então há pelo menos uma casa com pelo menos $k+1$ pombos.*

Observação 3.3.3.1: Na versão anterior, tínhamos $k = r = 1$, que era a versão mais simples possível, tendo em vista que $k, r \geq 1$.

Justificativa: Suponhamos que o enunciado estivesse equivocado, ou seja, para algum n e algum $k \geq 1$ fosse possível distribuir os $kn + r$ pombos nas n casas, sendo que em nenhuma dessas casas tivesse mais do que k pombos.

Assim, contando todos os k pombos contidos nas n casas, não teríamos mais do que nk pombos, contrariando a hipótese de termos $nk + r$ pombos distribuídos nas n casas. Conclui-se, portanto, que o enunciado é verdadeiro.

Observação 3.3.3.2: Um roteiro para facilitar na organização das ideias ao se resolver um problema de Princípio das Casas dos Pombos, segundo Holanda (2015), consiste em denotar:

- Quem são os pombos?
- Quantas são as casas?
- Quem são as casas?

Veremos a seguir alguns exemplos e aplicações envolvendo esses conceitos de Princípio das Casas dos Pombos.

Exemplo 3.3.3.1: Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Solução: Neste caso, os objetos são os alunos e as gavetas são as possíveis sequências de respostas. Como cada questão pode ser respondida de 5 maneiras, a prova pode ser preenchida de

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5 = 5^{10} = 9765625$$

maneiras.

Portanto, para se ter a certeza de que dois candidatos fornecem exatamente as mesmas respostas, deve-se ter, no mínimo

$$9765625 + 1 = 9765626$$

candidatos realizando essa prova.

Exemplo 3.3.3.2: Escolha 101 números ao acaso dentre os inteiros $1, 2, \ldots, 200$. Mostre que, entre os números escolhidos, há dois números tais que um deles é divisível pelo outro.

Solução: Note que é possível escolher 100 números do conjunto sem que exista um par onde um número divide o outro. Como exemplo, basta tomar os números $101, 102, \ldots, 200$. Porém, se acrescentarmos mais um número p (obrigatoriamente menor ou igual a 100) a essa coleção, um múltiplo seu já estará lá.

Na verdade, podemos garantir que esse múltiplo é da forma $2^k p$, em que k é um número inteiro não negativo e p é um número inteiro ímpar. Como exemplo disso, temos que $16 = 2^4 \cdot 1$, $25 = 2^0 \cdot 25$, $36 = 2^2 \cdot 9$.

Sabemos que no conjunto $\{1,2,3, \ldots, 200\}$ há 100 números ímpares. Assim, se $n \in \{1,2,3, \ldots, 200\}, n = 2^k b$, sendo b um dos números ímpares $1,3,5, \ldots, 199$, então quando escolhemos 101 números deste conjunto, dois deles terão suas partes ímpares (b) iguais.

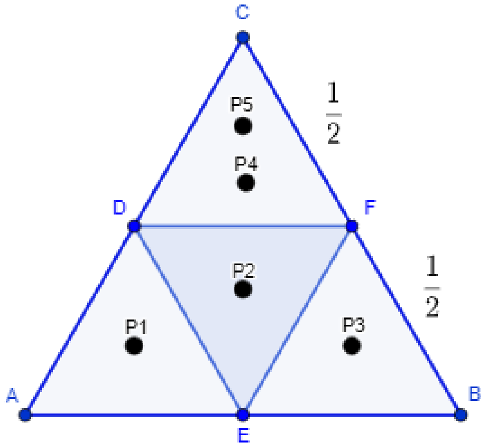
Denotando esses números por n_1 e n_2, temos $n_1 = 2^{k_1} b$ e $n_2 = 2^{k_2} b$. Se $k_1 < k_2$, então n_1 divide n_2. Por outro lado, se $k_2 < k_1$, então n_2 divide n_1, o que soluciona o nosso problema, pois todo subconjunto com 101 dos números de 1 a 200 sempre contém um número e um múltiplo seu obtido através da multiplicação por uma potência de 2.

Exemplo 3.3.3.3: Mostre que entre 5 pontos quaisquer escolhidos dentro de um triângulo equilátero de lado 1 sempre existe um par deles cuja distância não é maior que $\frac{1}{2}$.

Solução: Seja ABC um triângulo equilátero de lado 1 e D, E, F os pontos médios de AC, AB e BC, respectivamente.

Note que podemos dividir esse triângulo ABC em quatro triângulos equiláteros congruentes de lado $\frac{1}{2}$, sendo eles os triângulos AED, EBF, FDE e DFC, conforme indica a Ilustração 10 a seguir:

ILUSTRAÇÃO 10 – OS 5 PONTOS SOBRE O TRIÂNGULO



Fonte: elaborada pelo autor.

Se considerarmos os 5 pontos $P1, P2, P3, P4$ e $P5$ como sendo os pombos e os 4 triângulos como sendo as casas, o Princípio das Casas dos Pombos garante que algum triângulo conterá, pelo menos, dois desses pontos.

Como a maior distância entre dois pontos de qualquer desses triângulos dividos acima não é maior que a medida de seus lados, ou seja, não mede mais do que $\frac{1}{2}$, segue que o problema está resolvido.

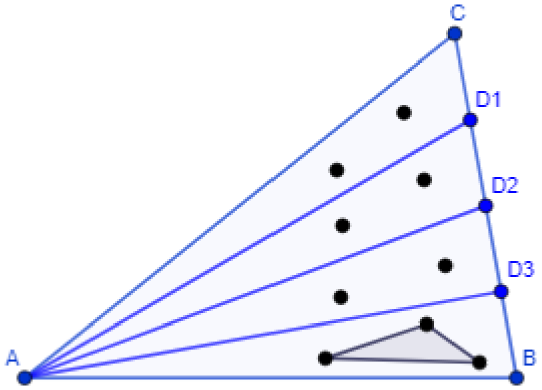
Exemplo 3.3.3.4: Nove pontos são colocados no interior de um triângulo de área $4cm^2$, de forma que não tenha 3 pontos colineares. Mostre que podemos escolher três desses pontos para serem os vértices de um triângulo de área no máximo igual a $1cm^2$.

Observação 3.3.3.3: Com 5 pontos já seria suficiente para o que se pede, mas não se usaria o Princípio das Casas dos Pombos.

Solução: Sejam A, B e C os vértices do triângulo de $4cm^2$. Considere três pontos D_1, D_2 e D_3 na aresta BC, de forma que ACD_1, AD_1D_2, AD_2D_3 e AD_3B formem quatro triângulos, cada um com área igual a $1cm^2$.

Assim, ao colocar os pontos no triângulo ABC, pelo Princípio das Casas dos Pombos, vão existir pelo menos 3 pontos em um dos quatro triângulos ACD_1, AD_1D_2, AD_2D_3 e AD_3B, conforme mostra a Ilustração 11 a seguir.

ILUSTRAÇÃO 11 – O TRIÂNGULO SUBDIVIDIDO



Fonte: elaborada pelo autor.

Percebe-se, portanto, que os três pontos que estão dentro de um destes 4 triângulos, por não serem colineares, formam um triângulo de área no máximo igual a $1cm^2$, que na figura do exemplo, está contido no triângulo AD_3B, mas que poderia ser em qualquer um dos outros três triângulos subdivididos na figura.

Exemplo 3.3.3.5: Qual é a quantidade mínima de brasileiros que devemos escolher para garantir que se possa formar um grupo com 6 pessoas que nasceram na mesma unidade da federação (total de 27)?

Solução: Inicialmente, pensando no pior dos casos, como são 27 unidades federativas (casas), distribuiríamos uma pessoa (pombo) por unidade até completar 27 grupos contendo exatamente 5 pessoas, ou seja, teríamos

$$27 \cdot 5 = 135$$

pessoas no total, considerando essa configuração.

Assim, como essa era a pior das hipóteses, ao distribuir mais uma pessoa em quaisquer dos grupos, teríamos a certeza de que em pelo menos um deles teriam 6 pessoas. Logo, seriam necessárias

$$135 + 1 = 136$$

pessoas para garantirmos que ao menos 6 delas tivessem nascido em uma mesma unidade da federação.

Como foi possível perceber em nossa fundamentação, evitamos a utilização demasiada de fórmulas, o que corrobora diretamente com a ideia central deste trabalho, ou seja, buscamos sempre a construção crítica do saber matemático em todos os detalhes.

3.4 A BNCC E O ENSINO DA COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Segundo Costa (2021), a importância de uma educação para todos, essencial para o pleno desenvolvimento da pessoa e a sua qualificação profissional, na qual se espera que, ao final de cada etapa, o educando alcance uma formação adequada estabelecida no currículo já estava previsto na própria Constituição Federal de 1988.

Corroborando com essa ideia, é possível identificar na referida Carta Magna, em seu artigo 210, que "serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais." (BRASIL, 1988).

Além disso, segundo a supracitada Constituição, em seu artigo 22, inciso XXIV, é competência da União legislar sobre diretrizes e bases da educação nacional. Assim, para o cumprimento deste item, foi promulgada a lei de Nº 9.394 do ano de 1996, denominada "Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB." (BRASIL, 1996).

A mencionada LDB, em seu artigo 26, regulamenta uma base nacional comum para a Educação Básica.

> Art. 26 - Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela. (BRASIL, 1996).

Nesse sentido, após aprovação da Resolução CNE Nº2, de 22 de dezembro de 2017, foi criada a Base Nacional Comum Curricular – BNCC. (BRASIL, 2018). O documento final, vigente atualmente, que orienta a implementação dos conteúdos necessários à integralização do currículo, foi homologado no ano seguinte, ou seja, 2018.

A BNCC é um documento que visa nortear a educação nacional, trazendo consigo, em suas competências gerais, que os estudantes tenham uma formação integral, comprometida com a "construção intencional de processos educativos que promovam aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea" (BRASIL, 2018, p.14).

As orientações contidas na BNCC estão divididas em quatro áreas do conhecimento, dentre as quais destaca-se a de Matemática e suas tecnologias, que será nosso foco neste trabalho. Segundo Costa (2021), a Matemática, assim como as demais áreas, é fundamental e possui grande importância na formação do cidadão.

Nessa perspectiva, destaca-se que o

> [...] conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais." (BRASIL, 2018, p. 20).

Para acompanhar o desenvolvimento do aluno ao longo do tempo, existe no documento o que se chama de "habilidades"[5]. Dentre as habilidades elencadas na BNCC (BRASIL, 2018), para a área de Matemática e suas Tecnologias para Ensino Médio, destacam-se duas que estão diretamente ligadas à aprendizagem da Combinatória, sendo elas:

> **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
> **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. (BRASIL, 2018).

A habilidade "EM13MAT311", segundo Costa (2021), expressa que o domínio das técnicas de contagem é fundamental para a realização de cálculos probabilísticos, como a delimitação do espaço amostral de eventos aleatórios. Por esse motivo, segundo o autor, geralmente o estudo da Combinatória antecede o da Probabilidade.

Já a habilidade "EM13MAT310", segundo o mesmo autor, faz referência aos princípios Aditivo e Multiplicativo, bem como aos métodos de contagem em geral. Além disso, essa habilidade expressa um detalhamento de algumas habilidades elencadas no Ensino Fundamental, sendo elas:

> **(EF04MA08)** Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
> **(EF05MA09)** Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.
> **(EF08MA03)** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo. (BRASIL, 2018).

[5] As habilidades elencadas na BNCC são os conhecimentos necessários para o pleno desenvolvimento das competências descritas no mesmo documento.

Concordamos com Farias e Almeida (2021) ao analisarem que os problemas envolvendo contagem iniciariam, no Ensino Fundamental, de situações em que seria permitido descrever todos os casos possíveis, para que posteriormente fossem resolvidos, no Ensino Médio, "[...] por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas [...]" (BRASIL, 2018, p.548).

Segundo os autores, isso corrobora com o que também é defendido pela BNCC, ao afirmar que os problemas de contagem devem ir progredindo de forma que, posteriormente, devem estar restritos àquelas situações cujas resoluções dependem da aplicação dos Princípios Multiplicativo e Aditivo e do Princípio da Casa dos Pombos (FARIAS E ALMEIDA, 2021).

Contudo, embora haja essa ideia de progressividade em relação ao ensino, essa generalidade ao tratar das habilidades, não detalhando como os professores devem trabalhá-las, segundo Farias e Almeida (2021, p. 8), deixa uma falha entre os documentos que o professor tem que seguir, qual seja a BNCC, e as metodologias utilizadas em sala de aula.

4 O ENSINO DA COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA MODELAGEM

Neste capítulo abordaremos a definição de Sequência Didática, bem como alguns conceitos e observações ao seu respeito. Além disso, iremos propor uma Sequência Didática para o ensino da Análise Combinatória na Educação Básica utilizando como estratégia metodológica a Modelagem Matemática.

4.1 O QUE É SEQUÊNCIA DIDÁTICA?

Hodiernamente, com a forte influência das tecnologias digitais no meio educacional, o professor precisa analisar constantemente as metodologias e as estratégias didáticas a serem utilizadas no ensino de Matemática. Nesse sentido, um olhar crítico tornou-se indispensável para que os processos de ensino e aprendizagem atinjam os objetivos propostos.

Esse olhar crítico em relação ao ensino, segundo D'Ambrosio (2009), é uma das características fundamentais necessárias a um docente preocupado com a Educação. Nessa perspectiva, concordamos com Dolz e Schneuwly (2004) ao defenderem a utilização de Sequências Didáticas como instrumentos que podem auxiliar os professores na condução das aulas e no planejamento das intervenções dos conteúdos junto aos alunos.

Uma Sequência Didática, segundo Pais (2002), é uma série de etapas organizadas e planejadas para desenvolver um determinado tema ou conteúdo. Seu principal objetivo é promover uma aprendizagem significativa, em que os alunos consigam interagir com os conteúdos e promover o conhecimento de forma integrada e progressiva.

De acordo com Oliveira (2013), no Brasil, a Sequência Didática começou a ser trabalhada a partir do ano de 1990 como instrumento de ensino, sob forte influência dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Nesse período, segundo o autor, essa ferramenta ainda era tratada como "projetos" e "atividades sequenciadas", passando a ser frequentemente utilizada.

Segundo Giordan e Guimarães (2012), ao se elaborar ou desenvolver uma Sequência Didática, diversas ações mediadas são estruturadas de maneira independente, utilizando ferramentas culturais específicas. Ainda segundo os autores,

> [...] cada uma dessas ferramentas deve ter uma função nítida na proposta de ensino e necessitam estar articuladas segundo um propósito de ação. Nesta perspectiva o foco de atenção do professor ao elaborar a Sequência Didática precisa estar no processo e não no produto da aprendizagem. (GIORDAN E GUIMARÃES, 2012, p. 13).

Pretendemos propor uma Sequência Didática utilizando como estratégia metodológica a Modelagem Matemática, pois entendemos que as situações cotidianas dos alunos nos possibilitam compreender a percepção de novos significados daquilo que estamos trabalhando. Corroborando com essa ideia, a BNCC orienta que

> [...] é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática [...] (BRASIL, 2018, p. 298).

Assim, cabe ao professor buscar essa proximidade entre a Matemática e as questões sociais dos alunos. Nesse sentido,

> [...] é preciso que os professores saibam construir atividades inovadoras que levem os alunos a evoluírem, nos seus conceitos, habilidades e atitudes, mas é necessário também que eles saibam dirigir os trabalhos dos alunos para que estes realmente alcancem os objetivos propostos. (CASTRO e CARVALHO, 2001, p. 114).

Diante disso, nota-se que, ao se planejar uma Sequência Didática, deve-se levar em consideração diversas variáveis. Dentre elas, destaca-se a comunicação de todos os envolvidos para desenvolver uma atividade e observar a relevância do tema para que os estudantes se envolvam no processo.

Nessa perspectiva, Giordan e Guimarães (2012, p. 4) destacam alguns elementos estruturantes fundamentais em uma Sequência Didática, mas que podem surgir outros, ou não, a depender das necessidades do professor. Esses elementos são:

> Título: Apesar de ser, dentre os elementos da Sequência Didática, o mais simples, o título não deve ser menosprezado, pois por si só é capaz de atrair a atenção ou, pelo contrário, criar resistências no alunado.
>
> Público Alvo: As Sequências Didáticas não são universais. Logo, os elementos e métodos que compõem sua Sequência Didática precisam estar em acordo com o público ao qual ela se destina.
>
> Problematização: A problematização é o agente que une e sustenta a relação sistêmica da Sequência Didática. Portanto, a argumentação sobre o problema é o que ancora a Sequência Didática, através de questões sociais e científicas que justifiquem o tema e também que problematizem os conceitos que serão abordados.

> Objetivos Gerais: Os objetivos propostos devem ser passíveis de serem atingidos, e os conteúdos devem refletir tais objetivos, que serão desenvolvidos com base na metodologia utilizada. A avaliação é uma forma de se verificar se foram alcançados ou não.
>
> Objetivos Específicos: Representam metas do processo de ensino-aprendizagem passíveis de serem atingidas mediante desenvolvimento da situação de ensino proposta. São um organizador detalhado das intenções de ensino, que auxiliam a planejar tanto a escolha das metodologias mais pertinentes a tal situação didática quanto as formas de avaliação.
>
> Conteúdos: Embora os conteúdos estejam tradicionalmente organizados de forma disciplinar, é também possível estabelecer relação com os demais componentes curriculares e integrar conceitos aparentemente isolados, mesmo porque os fenômenos da natureza não se manifestam segundo divisão disciplinar.
>
> Dinâmica: As metodologias de ensino têm caráter fundamental, pois é principalmente através do desenvolvimento delas que as situações de aprendizagem se estabelecem. Dinâmicas variadas de ensino são importantes e necessárias desde que se mantenham fiéis à estrutura e contexto social que a escola alvo ofereça.
>
> Avaliação: Os métodos avaliativos precisam ser condizentes com os objetivos e com os conteúdos previstos na Sequência. Desta forma, o que se avalia deve estar diretamente relacionado com o que se pretende ensinar.

Do ponto de vista procedimental, seguiremos a concepção de Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), os quais destacam que uma Sequência Didática é composta dos seguintes passos: apresentação da proposta; produção inicial; módulos da Sequência e produção final.

Optamos por seguir tais autores, pois suas ideias a respeito de Sequência Didática convergem com nossos objetivos em associá-la com a Modelagem Matemática. Adiante abordaremos cada um desses passos seguindo as ideias dos autores acima citados, associando também com as ideias de Modelagem defendidas por Barbosa (2001).

Apresentação da proposta: nesta etapa os alunos necessitam estar cientes de tudo que envolve o processo da Sequência Didática, desde o tema que será escolhido para ser utilizado, que será pautado em suas vivências cotidianas, até os resultados que o professor espera alcançar. É papel do formador justificar todas as escolhas tomadas e apresentá-las aos alunos, evitando, assim, dúvidas e insatisfações no processo.

Produção inicial: este é o momento em que os alunos devem ganhar voz. Os conhecimentos prévios, as expectativas para o processo e possíveis dúvidas iniciais devem ser abordadas inicialmente. O professor irá ouvir as opiniões dos alunos para fazer um diagnóstico da situação atual da turma e, assim, será muito mais fácil e eficiente determinar quais os objetivos da Sequência Didática almejada.

Módulos da Sequência: eles podem ser considerados como a parte estruturante da estratégia, pois são eles que serão colocados em prática durante a Sequência Didática, como as atividades, pesquisas e interações em geral. É necessário que tudo que for realizado seja dinâmico, enfático e percorra uma ordem lógica baseada nos objetivos inicialmente definidos.

Produção final: nesta etapa, colhem-se as respostas sobre a qualidade do processo e o que poderia ter sido feito diferente para melhor se adequar aos anseios dos alunos. Além disso, é aqui que se analisa a eficácia da Sequência desenvolvida, confrontando o que produziu com trabalhos realizados antes e depois da aplicação da proposta, por exemplo.

Assim, seguindo esses passos listados acima, apresentaremos na sessão seguinte uma proposta de Sequência Didática para o ensino da Análise Combinatória na Educação Básica utilizando a Modelagem Matemática.

4.2 UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta sessão apresentaremos uma proposta de Sequência Didática para o ensino da Análise Combinatória na Educação Básica utilizando, para isso, a Modelagem Matemática na perspectiva de Barbosa (2001). Porém, ressaltamos que essa será apenas uma proposta, ou seja, uma ideia geral do que seria trabalhar a Combinatória utilizando a Modelagem.

A referida Sequência poderá ser utilizada como parâmetro para os professores que se interessarem no tema, podendo ser reinventada sobre outras perspectivas, a depender das situações que surgirem e que os alunos propuserem ao professor. O diálogo entre todos, portanto, torna-se essencial nesse processo.

Na prática, conforme ressalta Barbosa (2001), o professor deverá levar em consideração todos os aspectos da turma, bem como suas vivências cotidianas e o que ocorre em seu entorno, como o contexto social atual de cada meio. Para isso, torna-se imprescindível a criatividade do professor e o olhar crítico sobre o tema escolhido.

Abaixo apresentaremos uma Sequência Didática proposta por nós para o ensino de conceitos combinatórios através da Modelagem Matemática para o terceiro ano do Ensino Médio, mas que pode ser adaptada para outras séries, caso haja necessidade. Para isso, seguiremos os passos elencados por Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), com algumas adaptações necessárias advindas do tema escolhido associado à Modelagem.

Utilizaremos um tema bastante relevante no contexto social, que é a inclusão da mulher na sociedade. Dentro desse aspecto, trabalharemos o futebol como um esporte capaz de promover tal ação. A partir disso, buscaremos modelar diversas situações envolvendo os conceitos de Combinatória nesse esporte, dando ênfase à modalidade feminina, como a Copa do Mundo de Futebol Feminino e o Campeonato Brasileiro de Futebol Feminino.

Uma observação a se fazer é que não iremos abordar todos os tópicos fundamentados no capítulo anterior na Sequência, mas eles podem ser trabalhados em outros contextos, a depender da necessidade do professor e da turma. Nesse sentido, apresentaremos, a seguir, a nossa proposta de Sequência Didática.

- **Unidade do conhecimento**

Análise Combinatória.

- **Objeto de conhecimento**

Princípio Fundamental da Contagem e Combinações Simples.

- **Competência específica**

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- **Habilidade**

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

4.2.1 Roteiro didático da Sequência

Adiante apresentaremos o roteiro didático da nossa proposta de Sequência Didática, seguindo os passos elencados por Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), com algumas adaptações necessárias advindas do tema escolhido associado à Modelagem.

Apresentação da proposta

Na primeira abordagem, seria feita uma discussão em sala envolvendo todos os presentes, com a leitura conjunta do texto listado abaixo.

Diversidade e inclusão: a importância da participação das mulheres no mercado de trabalho

Nossa sociedade é e sempre foi plural. Com a participação de diversas culturas, etnias, gêneros orientações sexuais, faixas etárias e por aí vai, formamos uma população heterogênea, constituída por uma infinidade de identidades que se cruzam e compõem a nossa coletividade.

Entendendo essa pluralidade em que vivemos, é importante que se tenha o compromisso de oferecer a todos esses grupos representatividade e acesso a espaços e oportunidades. Mas o que isso quer dizer?

Bom, não basta que as pessoas sejam diferentes entre si. Elas precisam exercer seus direitos e liberdade, de forma igualitária, sem que suas diferenças sejam um fator que limite sua vivência em sociedade.

Durante séculos, as mulheres tiveram apenas o papel de cuidadora do lar e da família na maioria das sociedades. A participação e representação delas na comunidade é algo recente, que começou a avançar nas últimas décadas.

Atualmente, tivemos alguns avanços no campo dos direitos femininos. No entanto, mesmo que esses direitos sejam iguais para mulheres e homens, a desigualdade de gêneros ainda persiste na prática.

Nesse sentido, ainda há muito a ser desenvolvido em relação à participação feminina no mercado de trabalho e na sociedade. Afinal, a inclusão e igualdade de gêneros traz uma série de benefícios não só para as mulheres, mas para toda a coletividade.

(Disponível em: https://institutodelongevidade.org/longevidade-e-trabalho/diversidade-e-inclusao-mulheres)

A partir da leitura e das discussões, o professor poderia apresentar para os alunos alguns mecanismos que seriam capazes de diminuir esse fator que perdura até os dias atuais na nossa sociedade, que é a exclusão feminina do meio social. Um desses mecanismos seria o futebol, que está ganhando notoriedade na modalidade feminina nos dias atuais.

A partir disso, o professor poderia propor que os alunos, com seu auxílio, fizessem uma pesquisa sobre a relação feminina com o futebol, trazendo alguns marcos históricos e algumas informações pertinentes. Todo o processo seria centrado sempre no aluno, pois a exclusão feminina está presente em todos os contextos e locais.

Produção inicial

Esta etapa seria o momento em que o aluno ganharia voz, ou seja, seria o momento de analisar os conhecimentos prévios a respeito do futebol e também de discussões relacionadas à pesquisa que eles teriam feito sobre o futebol feminino. Esse seria o momento também de enfatizar a importância do tema no contexto social.

Posteriormente, poderia ser discutido sobre os diversos campeonatos que existem atualmente e quais as suas configurações, regras e estruturas dos times. Além disso, poderia ser tratada também a quantidade de jogadores em cada time e suas posições, como a quantidade de zagueiros, meio-campistas e atacantes, conforme está listado adiante.

- **Campeonato de pontos corridos:** designa todo tipo de torneio em que cada um dos competidores enfrenta todos os demais. Ao final, aquele que obtiver mais pontos é o campeão.

- **Campeonato de fase de grupos e mata-mata:** é o sistema em que cada time que seja competidor disputa um certo número de partidas entre si (fase de grupos), até que alguns deles sejam promovidos à próxima fase do torneio (fase eliminatória). Em cada confronto (dois ou mais jogos) da fase eliminatória deve-se ter um vencedor, seja em tempo normal, prorrogação ou disputa por pênaltis.
- **Formações táticas:** no futebol, os esquemas táticos (ou formações) são as formas de um treinador organizar sua equipe dentro de campo. Uma formação tática compõe um goleiro e dez jogadores de linha.
- **Tipos de formações táticas:** o goleiro é fixo e não aparece. Os dez jogadores de linha se dividem em defensores, meio-campistas e atacantes. A FIFA[6] reconhece dez sistemas táticos, sendo eles: $(4-3-3); (4-4-2); (3-5-2); (3-4-3); (4-2-3-1)$ $(4-5-1); (5-3-2); (4-1-4-1); (4-1-3-2); (4-2-4)$. Os demais são considerados variações destes já existentes.

Esses esclarecimentos seriam necessários, pois nem todos os alunos poderiam ter o conhecimento dessas características desse esporte. Após isso, seguiria para os módulos da Sequência para se trabalhar os conteúdos em específico.

Módulo 1: Princípio Fundamental da Contagem

A partir dessas discussões, e já na perspectiva de iniciar os trabalhos com a Matemática, o professor poderia apresentar algumas situações a respeito dessas características do futebol, que seriam direcionados à Combinatória, conforme segue adiante.

Situação 1:

A CBF[7] apresentou, no último dia 3 de abril de 2023, o uniforme que a seleção de futebol feminina utilizará na Copa do Mundo de Futebol 2023, que será disputada na Austrália e Nova Zelândia entre os meses de julho e agosto de 2023. A nova camisa celebra a biodiversidade do Brasil e da Amazônia, trazendo a estampa de folhagem tropical – inspiradas nas folhas do Buriti, do Jaci e da Jarina – inserida na textura da malha da camisa por toda a peça. Como tradição, o uniforme 01 traz a camisa toda amarela, o calção todo azul e as meias brancas. Já o uniforme 02 contém a blusa toda azul, o calção todo branco e as meias também

[6] FIFA é a abreviação para Federação Internacional de Futebol.
[7] CBF é a abreviação para Confederação Brasileira de Futebol.

azuis. Imagine que fosse necessário fazer combinações entre esses itens, de forma que fosse possível combinar as peças do uniforme 01 com o 02. Um exemplo seria formar um uniforme com a camisa amarela, calção branco e meias azuis. Considerando essas características apresentadas, seria possível determinar a quantidade total de uniformes que poderíamos formar? Se sim, quantas variações distintas seriam?

Solução com os alunos: Inicialmente, o professor deixaria os alunos pensarem sobre os questionamentos realizados, sanando algumas dúvidas que porventura viessem a ocorrer. Um exemplo de solução seria analisar cada peça separadamente para formar o uniforme, como segue abaixo.

- Escolha da blusa: Temos duas opções;
- Escolha do calção: Temos duas opções;
- Escolha das meias: Temos duas opções.

Seria interessante também ilustrar essa ideia, a fim de facilitar na compreensão, conforme segue a Ilustração 12 adiante.

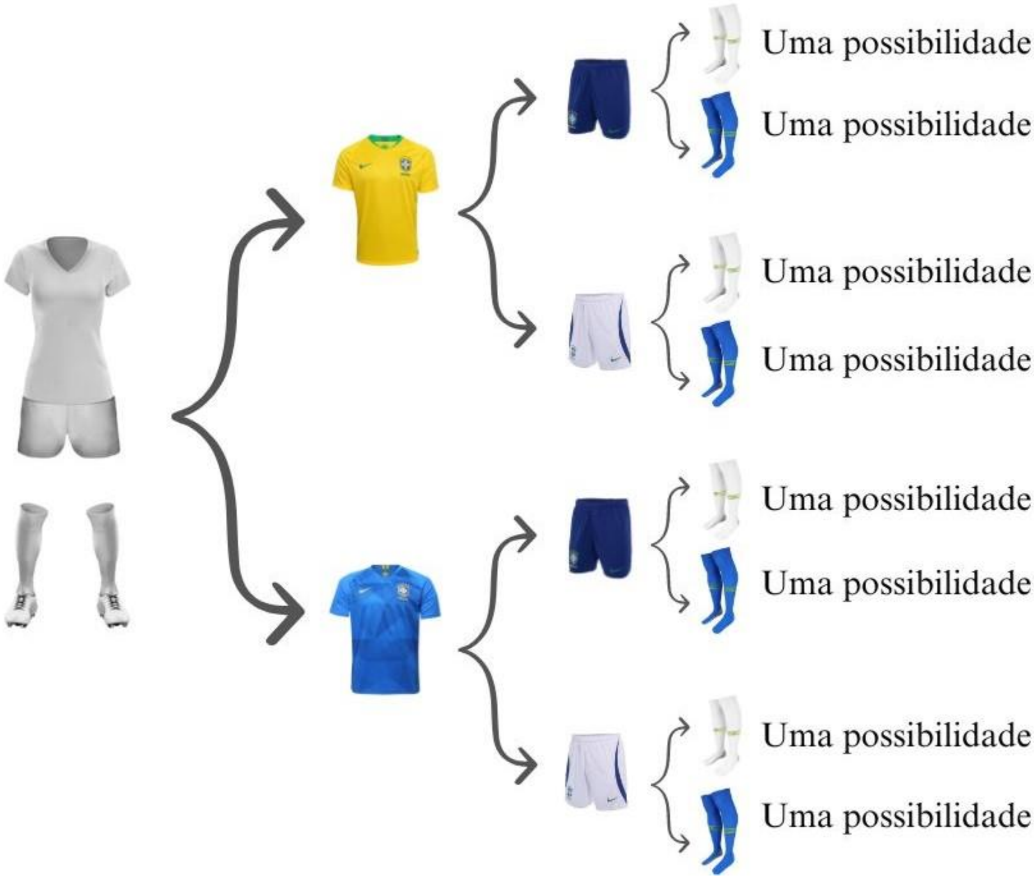
ILUSTRAÇÃO 12 – REPRESENTAÇÃO DOS UNIFORMES

Fonte: elaborada pelo autor.

Esse é o momento para o professor discutir com os alunos a respeito da relação entre decisões sucessivas e como elas interferem no processo. Assim, seria necessário abordar que no problema em questão, para se formar um uniforme, deve-se escolher uma camisa, um calção e um par de meias, sucessivamente.

Nesse sentido, escolhendo a camisa amarela, poderíamos escolher quaisquer dos dois calções (branco ou azul) e, escolhendo um desses calções, poderíamos escolher qualquer uma das meias (brancas ou azuis). O mesmo aconteceria se escolhêssemos a camisa azul inicialmente, conforme consta na Ilustração 13 a seguir.

ILUSTRAÇÃO 13 – TOTAL DE UNIFORMES POSSÍVEIS



Fonte: elaborada pelo autor.

Conforme consta na Ilustração 13, temos 8 possibilidades de montar um uniforme com esses itens. Vejamos outra situação adiante.

Situação 2:

O Campeonato Brasileiro de Futebol Feminino 2023 A1 está sendo disputado por dezesseis clubes e é composto por quatro fases. A primeira fase é composta por um grupo geral, onde todos jogam contra todos na modalidade de pontos corridos, em turno único. Para disputar a segunda fase, classificar-se-ão os oito primeiros clubes mais bem posicionados na tabela de classificação, com base em suas pontuações ou critérios de desempate estabelecidos no regulamento. Na segunda fase, os jogos seguem o esquema da Tabela abaixo:

TABELA 4 – CONFRONTOS DA SEGUNDA FASE

Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
1º Colocado × 8º Colocado	2º Colocado × 7º Colocado	3º Colocado × 6º Colocado	4º Colocado × 5º Colocado

Fonte: adaptada de Confederação Brasileira de Futebol.

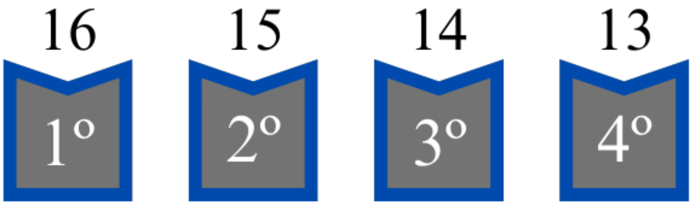
Sabe-se que o futebol é imprevisível, mas seguindo as estatísticas, é muito mais vantajoso enfrentar um clube que está abaixo na tabela que enfrentar um que está mais bem classificado. Nesse sentido, considerando um pódio com os quatro primeiros colocados, seria possível totalizar quantos pódios poderíamos formar? Se sim, quantos seriam?

Solução com os alunos: Seria interessante deixar os alunos pensarem sobre o problema, afinal, todo o processo tem como sujeito o próprio discente. O professor poderia sugerir aos alunos que fixassem os quatro primeiros lugares da tabela e seguissem uma ordem, como por exemplo, do primeiro lugar para o quarto lugar, pois é mais viável alocar os times nas posições do que fazer o processo inverso. Assim, teríamos:

- Na primeira posição: 16 possibilidades, pois qualquer clube poderia ocupar.
- Na segunda posição: 15 possibilidades, pois um já ocupou a posição anterior.
- Na terceira posição: 14 possibilidades, pois dois já ocuparam as posições anteriores.
- Na quarta posição: 13 possibilidades, pois três já ocuparam as posições anteriores.

Seria interessante também ilustrar essa ideia, a fim de facilitar na compreensão, conforme segue adiante na Ilustração 14.

ILUSTRAÇÃO 14 – REPRESENTAÇÃO DOS PÓDIOS



Fonte: elaborada pelo autor.

É relevante, novamente, explicar sobre a ideia de decisões sucessivas e relacioná-la com uma das funções da multiplicação, pois para se formar o pódio com quatro clubes, deve-se escolher um clube para a primeira posição e, após essa escolha, escolher um clube para a segunda posição, e assim sucessivamente.

Seria interessante o professor deixar os alunos tentarem resolver o problema, pois em uma primeira análise, é de fácil resolução: basta listar os possíveis pódios. Contudo, nesta situação não é viável listar todas as possibilidades como fizemos na Situação 1 e, assim, tem-se a necessidade de um outro método de resposta, que seja mais genérico.

Nesse sentido, após todas as discussões, o professor poderia apresentar um método que fosse capaz de resolver esses problemas mais complexos.

Formalização dos conceitos

Aqui é o momento para o professor buscar, junto com a turma, uma formalização das ideias vistas em termos matemáticos, que seria a obtenção do modelo matemático que traduz o problema, caso exista. Vamos generalizar a ideia do Princípio Fundamental da Contagem utilizando como base a primeira situação descrita anteriormente.

Na Situação 1, vimos que, com poucos objetos, é relativamente fácil enumerar as possibilidades. Porém, com um número maior (Situação 2) isso se torna inviável. Da Situação 1, sabemos que foi necessário tomar três decisões sucessivas (escolher uma camisa, um calção e um par de meias) e que cada decisão poderia ser tomada de duas maneiras.

Fixando uma das camisas (amarela), vimos que poderiam ser formados quatro uniformes com ela. O mesmo vale se fixarmos a outra (azul). Assim, teríamos

$$4 + 4 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

maneiras de montar um uniforme com aqueles itens.

Perceba que utilizamos uma das ideias da multiplicação, que é a de soma sucessiva de parcelas iguais. Nesse sentido, pode-se afirmar que tomar decisões sucessivas nos remete a ideia de multiplicação. Assim, segue a apresentação do Princípio Fundamental da Contagem:

Princípio Fundamental da Contagem (generalizado): *se uma decisão d_1 puder ser tomada de x_1 maneiras, uma decisão d_2 puder ser tomada de x_2 maneiras,..., uma decisão d_n puder ser tomada de x_n maneiras, sendo todas as decisões sucessivas, então o número de maneiras de se tomar as decisões $d_1, d_2, \ldots, d_n$ será o produto entre elas, ou seja, $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$.*

A partir disso, o professor poderá explicar sobre o nome e porque ele é tido como Princípio Fundamental da Contagem. Isso é importante, pois os alunos perceberão a simplicidade e ao mesmo tempo a importância desse método. Lembramos que essa é uma apresentação genérica, que pode ser simplificada, a depender do contexto.

Voltando à Situação 2, o professor poderia explicar aos alunos o porquê de não ser viável resolver listando todos os pódios. Como teríamos de tomar 4 decisões sucessivas, que seriam escolher o primeiro (16 possibilidades), o segundo (15 possibilidades), o terceiro (14 possibilidades) e o quarto colocado (13 possibilidades), teríamos

$$16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 43680$$

maneiras de formar o pódio do problema.

Módulo 2: Combinações Simples

A partir das ideias descritas anteriormente, e na perspectiva de continuar os estudos envolvendo os conceitos de Combinatória, o professor poderá apresentar à turma outras situações para se abordar a ideia de Combinações Simples, conforme segue adiante.

Situação 1:

Para a alegria dos amantes de futebol, a Copa do Mundo Feminina 2023 está chegando. Depois de quatro anos, as atletas de vários países do mundo voltarão a disputar a taça que é mundialmente cobiçada. Há novidades no formato nesta edição, pois será disputada por 32 seleções nacionais, ao invés de 24, como era anteriormente. As 32 equipes foram divididas em oito grupos, nomeados como A, B, C, D, E, F, G e H, em que cada um deles contém quatro seleções, conforme está descrito na Tabela 5 adiante.

TABELA 5 – GRUPOS DA COPA DO MUNDO DE FUTEBOL FEMININA 2023

GRUPO A	GRUPO B	GRUPO C	GRUPO D
Nova Zelândia	Austrália	Espanha	Inglaterra
Noruega	Irlanda	Croácia	Dinamarca
Filipinas	Nigéria	Zâmbia	China
Suíça	Canadá	Japão	Haiti
GRUPO E	**GRUPO F**	**GRUPO G**	**GRUPO H**
Estados Unidos	França	Suécia	Alemanha
Vietnã	Brasil	África do Sul	Marrocos
Holanda	Jamaica	Itália	Colômbia
Portugal	Panamá	Argentina	Coreia do Sul

Fonte: elaborada pelo autor.

A primeira fase será na modalidade de pontos corridos sem returno, ou seja, cada seleção enfrenta todas as demais do grupo em jogos únicos. Ao final, classificam-se as duas primeiras equipes de cada um dos grupos. Considerando esse contexto, seria possível determinar o total de jogos que acontecerá na primeira fase do torneio? Se sim, quantos serão no total?

Solução com os alunos: Neste momento o professor deverá esclarecer as dúvidas que porventura vierem a ocorrer. Além disso, seria o momento para reforçar os conceitos técnicos da questão, como o que são campeonatos de pontos corridos sem returno e como eles se procedem. Porém, o importante seria deixar os alunos pensarem no problema.

Uma solução possível seria listar todos os jogos de um determinado grupo e depois multiplicar esse resultado pelo número de grupos que constam na Copa. A exemplo, tomaremos como base o grupo F, que consta o Brasil entre os integrantes.

Para facilitar, seria interessante dividir os confrontos em rodadas. Fixando o Brasil como base, a cada rodada ele enfrentará uma seleção e as demais se enfrentarão. Nesse sentido, como são jogos únicos, teríamos o seguinte:

- Rodada 1: Terá dois jogos;
- Rodada 2: Terá dois jogos;
- Rodada 3: Terá dois jogos.

Seria interessante também ilustrar essa ideia aos alunos, a fim de facilitar na compreensão, conforme segue a Ilustração 15 a seguir.

ILUSTRAÇÃO 15 – AS TRÊS RODADAS DA PRIMEIRA FASE DO GRUPO F

RODADA 1			RODADA 2			RODADA 3		
FRA	x	JAM	FRA	x	BRA	JAM	x	BRA
BRA	x	PAN	PAN	x	JAM	PAN	x	FRA

Fonte: elaborada pelo autor.

Contando os jogos, percebe-se que no grupo F terá seis jogos no total. Aqui o professor poderia mostrar que a contagem de jogos nos grupos é igual e, assim, teremos

$$6 \cdot 8 = 48$$

jogos no total, na primeira fase da Copa do Mundo de Futebol Feminina 2023.

Situação 2:

O Campeonato Brasileiro de Futebol Feminino 2023 está sendo disputado entre os 16 clubes classificados de acordo com o regimento disponibilizado pela CBF. A competição é composta por quatro fases, sendo que a primeira é no formato de pontos corridos sem returno, ou seja, cada clube enfrenta todos os demais em jogos únicos. Esta fase está prevista para terminar no dia 12 de julho, que é o período em que vai ser disputada a Copa do Mundo de Futebol Feminina 2023 na Nova Zelândia e Austrália nos meses de julho e agosto. Considerando esses aspectos, seria possível determinar o número total de jogos da primeira fase do Campeonato? Se sim, quantos seriam?

Solução com os alunos: Analogamente à situação anterior, seria interessante o docente deixar os alunos pensarem no problema, pois todo o processo tem como parte central o próprio discente. O professor poderia sugerir que os alunos dividissem o problema em etapas mais simples, ou seja, que dividissem a primeira fase do campeonato em rodadas e refletissem sobre a quantidade de jogos de cada uma delas.

A cada rodada todos os times enfrentam um adversário. Nesse sentido, como são 16 clubes e cada um dos jogos é realizado por dois deles, teríamos oito jogos a cada rodada do campeonato. Neste momento o professor poderia propor aos alunos que eles refletissem sobre quantas rodadas teriam no total, pois aí ficaria fácil: bastaria multiplicar a quantidade de jogos de uma rodada pela quantidade de rodadas.

Para determinar a quantidade de rodadas desse campeonato, o professor poderia instruir os alunos a fixarem um time A qualquer e analisá-lo separadamente. Sabemos que esse time jogará contra todos os outros 15, mas nunca contra si próprio, e o mesmo vale para os demais clubes integrantes. Assim, pode-se afirmar que esse time disputará 15 jogos e, como ele jogará em todas as rodadas, denota-se que esse campeonato conterá 15 rodadas.

Logo, como temos um campeonato sem returno de 15 rodadas, em que cada rodada são disputados oito jogos, tem-se

$$8 \cdot 15 = 120$$

jogos na primeira fase desse campeonato.

Para ratificar essa ideia, o professor poderá apresentar outras situações com o intuito de mostrar aos alunos a necessidade de métodos mais genéricos, como segue adiante.

Situação 3:

Todos os adeptos do futebol estão na expectativa para a convocação da Seleção Brasileira de Futebol Feminina para a Copa do Mundo 2023. Esta edição da Copa ainda segue o padrão anterior, em que cada seleção poderá convocar 23 atletas para o torneio. A expectativa é que, para o grupo final, sejam convocadas 3 goleiras, 8 defensoras, 7 meio-campistas e 5 atacantes. A técnica da Seleção Feminina, a sueca Pia Sundhage, é adepta da formação tática $4-4-2$, que é composta por uma goleira, quatro defensoras, quatro meio-campistas e duas atacantes. Tendo sempre a goleira Letícia como titular, e considerando a formação tática utilizada por Pia, seria possível determinar a quantidade total de times que poderiam ser formados? Se sim, quantos seriam? E se não tivesse fixado a goleira, quantos seriam?

Solução com os alunos: Inicialmente, seria relevante o professor deixar os alunos pensarem sobre a situação, sanando as inquietações que talvez surgirão no processo. Após isso, o docente poderia sugerir que a turma dividisse o problema em etapas mais simples, que seria calcular cada posição separadamente e depois juntá-las. Assim, teríamos:

- Goleira: uma opção fixa;
- Defensoras: quatro opções de escolha, dentre 8 disponíveis;
- Meio-campistas: quatro opções de escolha, dentre 7 disponíveis;
- Atacantes: duas opções de escolhas, dentre 5 disponíveis.

Caso não tivéssemos fixado a goleira para a escolha, a situação anteriormente sofreria uma pequena alteração na configuração, ou seja, teríamos o seguinte:

- Goleira: uma opção de escolha, dentre 3 disponíveis.

Aqui seria o momento para o professor já ir familiarizando os alunos com essa ideia de escolha de p elementos dentre n disponíveis, sendo $0 \leq p \leq n$, pois já servirá como base para a formalização dos conceitos sobre o tema. Inclusive, seria bom alertá-los que, para a solução final, será utilizado conceitos já vistos, como o Princípio Multiplicativo.

Seria relevante deixar os alunos resolverem a situação, pois à primeira vista até parece simples: bastaria enumerar cada posição e depois juntá-las. Porém, essa estratégia não seria viável como foi nas situações 1 e 2 e, por isso, torna-se necessário obter outro método mais eficaz, que seja mais genérico e que facilite o processo.

Formalização dos conceitos

Após todas as discussões sobre as situações apresentadas, o professor poderá, junto com a turma, buscar uma formalização das ideias trabalhadas em termos matemáticos, ou seja, buscar um modelo matemático que traduza o problema em termos formais. Partiremos da situação 1 para generalizarmos a ideia de Combinações Simples. Para isso, denotaremos que a turma já tenha familiaridade com os conceitos de fatorial.

Esta etapa requer bastante empenho e criatividade por parte do professor, que deverá buscar diversos meios de se fazer essa generalização. Na situação 1, tínhamos 4 seleções por grupo e queríamos determinar a quantidade de jogos no total. Assim, fixamos o grupo F – que continha o Brasil – e analisamos ele separadamente. Dividimos os jogos em rodadas e depois multiplicamos por 8 (quantidade total de grupos).

Inicialmente, o professor poderá mostrar que, como são 4 seleções e cada jogo é disputado por duas delas, então é possível fixar as disposições dos times e ver as possibilidades de cada uma, conforme segue a Tabela 6 a seguir.

TABELA 6 – POSSIBILIDADES DE ESCOLHAS DOS TIMES

1ª escolha para o **jogo 1**	2ª escolha para o **jogo 1**	1ª escolha para o **jogo 2**	2ª escolha para o **jogo 2**
quatro possibilidades	*três possibilidades*	*duas possibilidades*	*uma possibilidade*

Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, utilizando os conceitos já vistos, sabemos que o resultado dessa quantidade de escolhas é: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$. Porém, as seleções se enfrentarão em jogos únicos, então a ordem de escolha de cada uma delas não importa. A exemplo, fixaremos o Brasil como base, conforme segue a Tabela 7 adiante.

TABELA 7 – CONFRONTOS DO BRASIL

Brasil x França	Brasil x Panamá	Brasil x Jamaica
França x Brasil	Panamá x Brasil	Jamaica x brasil

Fonte: elaborada pelo autor.

De maneira análoga acontece também para as demais seleções. Nesse sentido, percebe-se que a contagem está sendo feita a mais e carece de correção. Neste momento o professor poderá indagar a turma sobre essa ideia, e propor estratégias para que eles visualizem esse pensamento.

Para fazer essa correção, deveremos dividir as quatro seleções em dois grupos, que são os times dos confrontos selecionados e as seleções dos confrontos não selecionados, que estão em vermelho na Tabela 7. Assim, teremos: 24 disposições iniciais, dois times por confrontos selecionados e dois times por confrontos não selecionados, ou seja,

$$\frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

confrontos por grupo, totalizando $6 \cdot 8 = 48$ jogos na primeira fase da Copa.

Neste momento o professor poderá fazer uma discussão a respeito dos resultados obtidos, seguindo para a generalização, conforme consta a seguir.

Combinações Simples: De maneira geral, selecionar p, dentre os n elementos disponíveis, equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, que são os selecionados, e um grupo de $(n - p)$ objetos, que são os não selecionados. Assim, escolher p elementos dentre n, com $0 \leq p \leq n$, que é o número de Combinações Simples, é igual a:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Nesse sentido, voltando à situação 2, como temos 16 clubes disputando o campeonato, em que a primeira fase é na modalidade de pontos corridos sem returno, tem-se que $n = 16$. O grupo dos selecionados (p) será os dois clubes de cada confronto, e o dos não selecionados $(n - p)$ será os 14 clubes dos confrontos repetidos inicialmente por 16!.

Com isso, utilizando o modelo listado acima, teremos um total de

$$\binom{16}{2} = \frac{16!}{2! \cdot (16-2)!} = \frac{16!}{2! \cdot 14!} = 120$$

jogos nessa primeira fase do campeonato.

Em relação à situação 3, deveremos fazer as escolhas por posições. Inicialmente, para a goleira, temos uma opção apenas. Para as defensoras, como devemos escolher 4, dentre 8 disponíveis, então teremos

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$$

possibilidades de escolha.

Para as meio-campistas, deveremos escolher 4 também, mas dentre 7 disponíveis. Neste caso, teremos um total de

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$$

possibilidades de escolha.

Para as atacantes, deveremos escolher duas, dentre as 5 disponíveis, ou seja, teremos

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

possibilidades de escolha.

Como um time é formado por 11 jogadores, sendo uma goleira e 10 jogadoras de linha, então deveremos fazer essas escolhas de maneira sucessivas. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, teremos

$$1 \cdot 70 \cdot 35 \cdot 10 = 24500$$

maneiras de se formar um time, nessas condições.

Caso não tivéssemos fixado a goleira inicialmente, teríamos de escolher novamente, mas dentre 3 disponíveis. Logo, seriam

$$\binom{3}{1} = \frac{1!}{1! \cdot (3-1)!} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$$

maneiras de escolhas.

Para as escolhas das demais posições em nada se alterariam. Nesse sentido, Pelo Princípio Fundamental da Contagem, seriam

$$3 \cdot 70 \cdot 35 \cdot 10 = 73500$$

maneiras de se formar um time, nessas condições.

Após isso, o professor poderia conversar com a turma sobre as generalizações matemáticas e sobre o uso de fórmulas a depender do contexto. Além disso, seria o momento ideal para apresentar os passos listados por Morgado *et al.* (1991) para se resolver um problema de contagem, conforme segue adiante.

- **Postura:** inicialmente, segundo os autores, devemos sempre nos colocar no papel de quem vai fazer a ação solicitada pelo problema e analisar as decisões a serem tomadas.
- **Divisão:** posteriormente, de acordo com os autores, devemos, sempre que for possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.
- **Não adiar dificuldades:** por fim, conforme os autores, não devemos adiar os impasses encontrados, pois pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em grandes dificuldades. Caso uma das decisões a serem tomadas seja mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Esta foi a nossa proposta de Sequência Didática, que poderá servir como base para aqueles que se interessarem pelo tema. Na prática, o professor deverá ter bastante criatividade e empenho ao desenvolver uma atividade com Modelagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve o intuito de entender como a Modelagem Matemática pode contribuir no processo de ensino da Análise Combinatória na Educação Básica. Para isso, optamos por uma pesquisa com uma abordagem qualitativa, do tipo exploratória. Ao final, propusemos uma Sequência Didática para o ensino da Combinatória na Educação Básica utilizando como estratégia a Modelagem Matemática.

Na abordagem da Modelagem, apresentamos o conceito de modelo matemático, bem como o que é Modelagem Matemática e as diversas linhas de pensamento sobre o tema, dos quais optamos por seguir a perspectiva de Barbosa (2001). Além disso, fizemos uma análise histórica tanto no mundo, como no Brasil. Por fim, trouxemos a Modelagem no contexto do Ensino de Matemática, enfatizando suas vantagens.

Em relação à Análise Combinatória, fizemos, inicialmente, uma abordagem histórica do tema e destacamos sobre seu estudo na Educação Básica, tendo como parâmetro principal a BNCC. Além disso, enfatizamos algumas técnicas de contagem comumente utilizadas na Educação Básica e outras não tão usuais nesta etapa da educação, mas que merecem atenção. Para a apresentação das técnicas de contagem, utilizamos como base as obras de Franco (2020), Morgado *et al.* (1991) e Machado Júnior e Santana Neto (2020).

Para relacionar essas duas variáveis – a Modelagem e a Combinatória – optamos por propor uma Sequência Didática com o tema de inclusão social da mulher, na qual foram trabalhadas as ideias do Princípio Fundamental da Contagem e Combinações Simples. O tema da Sequência foi escolhido com o objetivo de ratificar a importância deste em todos os cenários. Dentro desse aspecto de inclusão, trabalhamos o futebol feminino como um dos esportes capazes de promover esse processo.

Nesse contexto, foi possível concluir que a Modelagem pode contribuir de maneira significativa no processo de ensino da Combinatória na Educação Básica, principalmente por possibilitar aos alunos a investigação sobre os conteúdos matemáticos propostos tendo como contexto as suas próprias vivências cotidianas. Nesse processo, os discentes passam a ser sujeitos ativos em busca do conhecimento.

Assim, reafirmou-se para nós a ideia de que a Modelagem se apresenta como uma estratégia bastante viável para se trabalhar os conteúdos combinatórios, principalmente na Educação Básica, que é a etapa em que o indivíduo desenvolve o pensamento crítico e molda sua identidade pessoal. Porém, percebemos no decorrer da elaboração que esse processo requer bastante criatividade, empenho e dedicação por parte do professor.

Por fim, deixa-se em aberto a possibilidade de continuação do tema abordado, pois possui uma grande relevância no contexto social atual. Além disso, podem ser trabalhadas outras metodologias associadas à Combinatória, ou abordar a Própria Modelagem a outros conteúdos matemáticos, que também possuem grande relevância social.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1. ed. 1ª reimpressão. São Paulo: Editora Contexto, 2013.

ALVES, Gleycianne Araújo. **Modelagem Matemática no ensino da Trigonometria**. 73 p. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão, 2017.

ARAGÃO, Maria de Fátima Andrade; BARBOSA, José Lamartine da Costa. **A história da Modelagem Matemática**: Uma perspectiva de didática no Ensino Básico. ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IX, p. 1-12, 2016.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem na Educação Matemática:** contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24. Caxambu: ANPED, 2001.

___________. **Modelagem Matemática:** O que é? Por que? Como? Veritati, n.4, p. 73-80, 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino – aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2006.

___________. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2011.

BASTOS, Ticiano Azevedo; ROSA, Milton. **Modelagem na Educação Matemática para o desenvolvimento de conceitos de Análise Combinatória**. Educação Matemática Debate, v. 4, p. 1-26, 2020.

BIEMBENGUT, Maria Sallet. HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

___________. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. 4ª reimpressão. São Paulo: Contexto, 2014.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 **Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira**: das propostas primeiras às propostas atuais. Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.7- 32, jul. 2009.

BORBA, Marcelo de Carvalho.; ARAÚJO, Jussara de Loiola; (Org.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática.** 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília: Diário Oficial da União, 1988.

BRASIL**. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília: Diário Oficial da União, 1996.

BRUMANO, Cleuza Eunice Pereira. **A modelagem matemática como uma metodologia para o estudo de Análise Combinatória**. 2014. 151 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014.

BURAK, Dionísio. **Modelagem matemática**: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. 460p. Tese (Doutorado em Psicologia Educacional). Unicamp, Campinas, 1992.

CASTRO, Amélia Domingues de; CARVALHO, Anna Maria Pessoa de. **Ensinar a ensinar**: didática para a escola fundamental e média. Connecticut, EUA: Cengage Learning Editores, 2001.

CHAVES, Rodolfo; LORENZONI, Luciano Lessa**. Modelagem matemática**: concepções e tutores do multicurso matemática. Salvador: Anais do X ENEM, 2010.

COSTA, Jaldir de Oliveira. **Guia de ensino para análise combinatória a partir dos livros didáticos, ENEM e BNCC**. 105 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande 2021.

CRISTOFOLETTI, Antônio. **Modelagem de Sistemas Ambientais**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1999.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 17. ed. Campinas: Papirus, 1996.

___________. **Etnomatemática:** elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

Diversidade e inclusão: a importância da participação das mulheres no mercado de trabalho. **Instituto de longevidade**: longevidade, inclusão e trabalho. 2022. Disponível em: https://institutodelongevidade.org/longevidade-e-trabalho/diversidade-e-inclusao-mulheres Acesso em: 03 de jun. de 2023.

DOLZ, Joaquim; NOVERRAZ, Michèle; SCNHEUWLY, Bernad. **Sequências didáticas para o oral e a escrita**: apresentação de um procedimento. In: SCNHEUWLY. B; DOLZ, J. Gêneros orais e escritos na escola. Campinas: Mercado de Letras, 2004.

DOLZ, Joaquim; SCHNEUWLY, Bernad. **Gêneros e progressão em expressão oral e escrita**: elementos para reflexões sobre uma experiência suíça (francófona). In Gêneros Orais e escritos na escola. Campinas (SP): Mercado de Letras. 2004.

FARIAS, Altemar Jatobá de; ALMEIDA, Fernando Emílio Leite de. **Olhando a Análise Combinatória sob o ponto de vista da teoria da Transposição Didática**. 2021.

FERNANDES, Alcione Marques; SILVA, Valéria Batista. **Modelagem Matemática e o ensino de Análise Combinatória**: introdução de conceitos por meio da escrita Braille. Revista Ensino UFMS, v. 1, n. 5, p. 94-109, 2020.

FIORENTINI, Dario. **Brazilian research in mathematical modelling**. Paper presented in the GT-17/ICME-8, Sevilla, Spain, 1996.

FONSECA, Kátia Rúbia Silva Carneiro. **Modelagem matemática no ensino básico**. 67 f. Dissertação (Mestrado). Universidade federal de Goiás, Goiânia, 2017.

FRANCO, Tertuliano Franco Santos. **Princípios de Combinatória e Probabilidade.** 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

GIL, Antônio Carlos. **Como classificar as pesquisas?** In: GIL, Antônio. 4. ed. São Paulo: Atlas S.a., 2002.

___________. **Como elaborar projeto de pesquisa**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1991.

GIORDAN, Marcelo; GUIMARÃES, Yara. **Estudo Dirigido de Iniciação à Sequência Didática**. Especialização em Ensino de Ciências, Rede São Paulo de Formação Docente (REDEFOR). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

GROSSI, Yonne de Souza. **Mina de Morro Velho**: a extração do homem, uma história de experiência operária. São Paulo: Paz e Terra, 1981.

HOLANDA, Bruno. **Princípio da Casa dos Pombos I**. Revista da Olimpíada – IME – UFG, v. 10, p. 51-57. Goiás: UFG, 2015.

HOUAISS, Antônio. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro, Ed. Objetiva, 2001.

KLÜBER, Tiago Emanuel; BURAK, Dionísio. **Modelagem Matemática:** pontos que justificam sua utilização no ensino. In: IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte: UNI-BH, 2007. p 1-19.

LÉVY, Pierre. **A inteligência Coletiva** – por uma antropologia de ciberespaço. Tradução de Luiz Paulo Rounet. São Paulo: Loyola, 1998.

LIMA FILHO, Euclydes Custódio de. **Modelos matemáticos nas ciências não exatas**. *In:* Eduardo Arantes Nogueira, Luiz Eduardo Barreto Martins, René Brenzikofer. Modelos matemáticos nas ciências não exatas: um volume em homenagem a Euclydes Custódio de Lima Filho. São Paulo: Blucher, 2008.

MACHADO JUNIOR, Ricardo Nunes; SANTANA NETO, Luiz Manoel de. **Análise Combinatória e Probabilidade**: Com Aplicações no SageMath. 2020.

MAGNUS, Maria Carolina Machado. **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: histórias em movimento. 227 f. Tese (Doutorado em Educação) –Programa de Pós-Graduação em Educação, UFSCar, São Carlos, 2018.

MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem**. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

MELLO, Harley Paulino de Moura. **Desmistificando o Ensino de Análise Combinatória.** 2017. 64 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2017.

MORGADO, Augusto César de Oliveira *et al.* **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NEEDHAM, Joseph. **Science and Civilisation in China**. London: Cambridge University Press, 1959.

OLIVEIRA, Carlos Alberto Lopes dos Santos de. **Análise combinatória**: raciocínio recursivo e processos sistemáticos de enumeração. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campos dos Goytacazes, 2015.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência Didática no processo de formação de professores**. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

QUARTIERI, Marli Teresinha; KNIJNIK, Gelsa. **Modelagem Matemática na Escola Básica**: surgimento e consolidação. Caderno pedagógico, Lajeado, v. 9, n. 1, p. 9-26, 2012.

RENZ JÚNIOR, Herton. **A Importância da Modelagem Matemática no Ensino-Aprendizagem**. 62f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFG, Catalão. 2015.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, Douglas Borreio Maciel dos. **Um panorama de pesquisas sobre o uso da modelagem matemática no ensino médio**: 2010 a 2014. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação: Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2016.

SILVEIRA, Alexis; FEREIRA, Gessé Pereira; SILVA, Leonardo Andrade da. **A evolução da modelagem matemática ao longo da história, o surgimento da modelagem no Brasil e suas contribuições enquanto estratégia de ensino de matemática.** Actas del VII CIBEM ISSN: 2301-0797, 2013.

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários de investigação**. Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro (SP), n. 14, p. 66-91, 2000.

SOARES, Sória Pereira de Lima. **Modelagem matemática como metodologia para o ensino aprendizagem da matemática**: revisão da literatura. Itinerarius Reflectionis, Goiânia, v. 15, n. 1, p. 01–12, 2019.

TEIXEIRA, Enise Barth. **A Análise de Dados na pesquisa Científica**: importância e desafios em estudos organizacionais. Desenvolvimento em Questão. v. 1, n. 2, p. 177–201, 2011.

VAZQUEZ, Cristiana Maria Roque. **O ensino de análise combinatória no ensino médio por meio de atividades orientadas em uma escola estadual do interior paulista**. 2011. 88 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas), UFSCar, São Carlos, 2011.

VIECILI, Cláudia Regina Confortin. **Modelagem matemática**: uma proposta para o ensino da matemática. 2006. 119 f. Dissertação (Mestrado). PUC, Rio Grande do Sul, 2006.

WIELEITNER, Heinrick. **História de La Matemática**. Editorial Labor, 1928.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA Bahia

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
Rua Vereador Romeu Agrário Martins, s/n - Bairro Tento - CEP 45400-000 - Valença - BA - www.portal.ifba.edu.br

Mauricio da Silva

A Modelagem Matemática associada ao Ensino da Análise Combinatória na Educação Básica

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Campus Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado pela banca examinadora em 12/07/2023.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Prof. Me. Marcelo de Araújo Lino (Coorientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Prof. Me. Diego Coutinho Vieira Santiago
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Profa. Ms. Fabiane Gomes Paim
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Em 06 de agosto de 2023.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **DIOGO SOARES DÓREA DA SILVA**, **Professor Efetivo**, em 06/08/2023, às 20:20, conforme decreto nº 8.539/2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **MARCELO DE ARAUJO LINO**, **Professor Efetivo**, em 07/08/2023, às 14:22, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **DIEGO COUTINHO VIEIRA SANTIAGO**, **Coordenador(a) do Curso de Licenciatura em Matemática**, em 07/08/2023, às 16:25, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **Fabiane Gomes Paim**, **Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico - Substituto**, em 07/08/2023, às 18:03, conforme decreto nº 8.539/2015.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site http://sei.ifba.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&acao_origem=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 informando o código verificador **3046498** e o código CRC **BFF7EA3A**.

23280.001374/2022-62 3046498v2